Barczy Mátyás és Pap Gyula

Valószínűségszámítás 2. példatár

mobiDIÁK könyvtár

Barczy Mátyás és Pap Gyula

Valószínűségszámítás 2. példatár

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Barczy Mátyás és Pap Gyula
Debreceni Egyetem

Valószínűségszámítás 2. példatár

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

Szerzők

Barczy Mátyás
egyetemi tanársegéd
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
barczy@inf.unideb.hu

Pap Gyula
egyetemi tanár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
papgy@inf.unideb.hu

Lektor

Iglói Endre
számítástechnikai munkatárs
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12

mobiDIÁK könyvtár

Debreceni Egyetem

Informatikai Kar

4010 Debrecen, Pf. 12

http://mobidiak.inf.unideb.hu

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003)) projekt keretében készült.

Bevezetés

Jelen munka a Debreceni Egyetem alkalmazott matematikus és matematikus szakos hallgatói részére tartott Valószínűségszámítás 2. Gyakorlat anyagát öleli fel. A gyakorlathoz kapcsolódó előadás anyagának gerincét *Dr. Pap Gyula: Valószínűségszámítás 2.* című jegyzete [8] adta, így főként az ott szereplő elméleti részekhez kapcsolódó feladatokat tárgyalunk. A *Feltételes várható érték és martingálok* című fejezetben pedig sok feladat és megoldása Móri Tamás: Diszkrét paraméterű martingálok című jegyzetéből [7], illetve Prokaj Vilmostól származik. Összesen 12 darab ábrát készítettünk, melyek a jegyzet legvégén találhatók.

Ezúton is szeretnénk köszönetet mondani Iglói Endrének figyelmes, lelkiismeretes lektori munkájáért. Észrevételeit, kiegészítéseit figyelembe véve a jegyzetet sok helyen pontosítottuk.

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítás 1. feladatok **7**
1.1. Valószínűségi változók eloszlása, várható értéke 7
1.2. Konvolúció 35
1.3. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség, Borel-Cantelli lemma 40

2. Valószínűségszámítás 2. feladatok **46**
2.1. Valószínűségi változók eloszlása, várható értéke 46
2.2. Konvergenciafajták 59
2.3. Borel–Cantelli-lemma és a nagy számok erős törvénye 87
2.4. Borel–Cantelli-lemma és határeloszlás-tételek 111
2.5. Karakterisztikus függvények, folytonossági tétel, gyenge konvergencia 135
2.6. Centrális határeloszlás-tétel 165
2.7. Feltételes várható érték és martingálok 175
2.8. Többdimenziós normális eloszlás 204

3. Valószínűségszámítás 2. felmérő feladatsorok **221**
3.1. 2001. év példái 221
3.2. 2003. év példái 224
3.3. 2004. év példái 225
3.4. 2005. év példái 229
3.5. 2006. év példái 236
3.6. 2009. év példái 244

Hivatkozások **245**

Ábrák jegyzéke **246**

1. Valószínűségszámítás 1. feladatok

1.1. Valószínűségi változók eloszlása, várható értéke

1.1.1. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, független valószínűségi változók úgy, hogy

$$P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Legyen továbbá τ a ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változóktól független valószínűségi változó, hogy $P(\tau \in \mathbb{Z}_+) = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$P(\xi_\tau = 0) = P(\xi_\tau = 1) = \frac{1}{2}.$$

Megoldás. A függetlenség alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P(\xi_\tau = 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_\tau = 0, \tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n = 0, \tau = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n = 0) P(\tau = n)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) = \frac{1}{2} P(\tau \in \mathbb{Z}_+) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan látható be, hogy $P(\xi_\tau = 1) = 1/2$. □

1.1.2. Feladat. (Rényi [2], 2.5.25.) Egy urnában N golyó van, fehérek és pirosak ($N \in \mathbb{N}$). A fehérek száma valószínűségi változó, melynek csak a várható értékét ismerjük. Legyen ez M. Egy golyót húzunk az urnából. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó fehér $\frac{M}{N}$. Miért teljesül, hogy $\frac{M}{N} \leqslant 1$?

Megoldás. Jelölje X az urnában levő fehér golyók számát. Legyen továbbá A az az esemény, hogy az urnából fehér golyót húzunk. A teljes valószínűség tétele alapján

$$P(A) = \sum_{k=0}^{N} P(A \,|\, X = k) P(X = k),$$

ugyanis $\{X = k\}$, $k = 0, \ldots, N$ egy teljes eseményrendszer. Így

$$P(A) = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} k P(X = k) = \frac{1}{N} \mathbb{E} X = \frac{M}{N}.$$

Itt $\frac{M}{N} \leqslant 1$, ugyanis

$$M = \sum_{k=0}^{N} k P(X = k) \leqslant N \sum_{k=0}^{N} P(X = k) = N \cdot 1 = N.$$

□

1.1.3. Feladat. Mutassunk példát olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre, és ebben olyan A, B és C eseményekre, ahol a $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez.

Megoldás. (Major Péter megoldása) Legyen $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{A} := 2^\Omega$, és

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) := \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad P(\{5\}) := 1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Legyenek továbbá $A := \{1,2,3\}$, $B := \{1,2,4\}$ és $C := \{2,3,4\}$. Ekkor

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

és $ABC = \{2\}$, $AB = \{1,2\}$ alapján

$$P(ABC) = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \qquad P(AB) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Ezért $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, de $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

Megjegyezzük, hogy van a feladatnak egyszerűbb (triviális) megoldása is. Tekintsünk egy olyan valószínűségi mezőt, melyben van két **nem** független esemény, jelöljük ezeket A-val, illetve B-vel. Legyen továbbá $C := \emptyset$. Ekkor $P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0$, de $P(AB) \neq P(A)P(B)$. □

1.1.4. Feladat. Egy n férőhelyes mozi egy előadására minden jegy elkelt, ahol $n \geqslant 2$. Az elsőnek érkező vendég az n hely közül véletlenszerűen választ egyet és leül oda. A másodiknak érkező vendég megnézi, hogy szabad-e a helye, ha igen leül oda, egyébként pedig a meglevő helyek közül egyenlő valószínűséggel választ egyet. Az összes többi vendég is hasonlóan jár el. Mi a valószínűsége, hogy az utolsónak érkező vendég szabadon találja a helyét?

Megoldás. Feltehető, hogy a székek az $1,2,\ldots,n$ számokkal vannak megszámozva, és az is, hogy az i-ediknek érkező vendégnek $(i = 1,\ldots,n)$ az i-edik székre szól a jegye. Vezessük be az alábbi eseményeket:

$$A_n := \Big\{\text{az utolsónak érkező vendég a saját helyére (n-edik szék) tud ülni}\Big\},$$
$$B_k := \Big\{\text{az elsőnek érkező vendég a k-adik székre ül}\Big\}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

A $P(A_n)$ valószínűséget kell meghatároznunk. A teljes valószínűség tétele szerint, felhasználva, hogy $P(B_k) = \frac{1}{n}$, $k = 1,\ldots,n$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_n \,|\, B_k)P(B_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_n \,|\, B_k) \\
&= \frac{1}{n}\Big(P(A_n \,|\, B_1) + \sum_{k=2}^{n-1} P(A_n \,|\, B_k) + P(A_n \,|\, B_n)\Big) \\
&= \frac{1}{n}\Big(1 + \sum_{k=2}^{n-1} P(A_n \,|\, B_k) + 0\Big).
\end{aligned}$$

Ha $2 \leqslant k \leqslant n-1$, úgy a B_k esemény bekövetkezése esetén a 2-odiknak, 3-adiknak, ..., $(k-1)$-ediknek érkező vendég a saját helyére tud leülni. Abban az esetben, ha a k-adiknak érkező vendég az 1. székre ül le, úgy a $(k+1)$-ediknek, ..., n-ediknek érkező vendég le tud ülni a saját helyére. Abban az esetben, ha a k-adiknak érkező vendég az l-edik székre ül le, ahol $l \in \{k+1, \ldots, n\}$, úgy a $(k+1)$-ediknek, ..., $(l-1)$-ediknek érkező vendég a saját székére tud leülni.

A fentiek alapján, bevezetve az $a_{n,k} := P(A_n \mid B_k)$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, jelöléseket, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
a_{n,k} &= P\big(A_n \cap \{\text{a k-adiknak érkező vendég az 1. székre ül le}\} \mid B_k\big) \\
&\quad + \sum_{l=k+1}^{n} P\big(A_n \cap \{\text{a k-adiknak érkező vendég az } l\text{-edik székre ül le}\} \mid B_k\big) \\
&:= P(A_n \cap C_1^{n,k} \mid B_k) + \sum_{l=k+1}^{n} P(A_n \cap C_l^{n,k} \mid B_k) \\
&= P(A_n \mid C_1^{n,k} \cap B_k) P(C_1^{n,k} \mid B_k) + \sum_{l=k+1}^{n} P(A_n \mid C_l^{n,k} \cap B_k) P(C_l^{n,k} \mid B_k) \\
&= 1 \frac{1}{n-(k-1)} + \sum_{l=k+1}^{n} a_{n-(k-1),l-k+1} \frac{1}{n-(k-1)}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n-1,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőség egyrészt abból következik, hogy ha az elsőnek érkező ember a k-adik székre ült le, úgy a k-adiknak érkező ember $n-(k-1)$ szék közül választhat, hiszen a 2., 3., ..., k. székek már foglaltak; másrészt pedig abból, hogy a szabadon maradó székek (1. szék, (k+1). szék, ..., n. szék) közül az l. szék ($l \in \{k+1, ..., n\}$) a szabadon maradó székeket számolva csak az $(l-k+1)$. szék.

Így

$$a_{n,k} = \frac{1}{n-k+1}\big(1 + a_{n-k+1,2} + \ldots + a_{n-k+1,n-k+1}\big), \qquad k = 2, \ldots, n-1.$$

Felhasználva, hogy $a_{n,1} = 1$, $n \geqslant 2$, és azt, hogy

(1.1.1) $$P(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k}, \quad n \geqslant 2,$$

kapjuk, hogy

$$a_{n,k} = P(A_{n-k+1}), \quad k = 2, \ldots, n-1.$$

Ezért (1.1.1) alapján

$$P(A_n) = \frac{1}{n}\Big(1 + \sum_{k=2}^{n-1} P(A_{n-k+1})\Big), \quad n \geqslant 2.$$

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $P(A_n) = \frac{1}{2}$, $n \geqslant 2$. Ha $n = 2$, úgy

$$P(A_2) = P\big(\text{az elsőnek érkező vendég a helyére (1. szék) ül}\big) = \frac{1}{2}.$$

Tegyük fel, hogy $P(A_2) = \cdots = P(A_{n-1}) = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$P(A_n) = \frac{1}{n}\Big(1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{n}\Big(1 + \frac{n-2}{2}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Tehát $P(A_n) = \frac{1}{2}$, $n \geqslant 2$. □

1.1.5. Feladat. (6^{th} International Mathematics Competition for University Students, 1999) Egy szabályos kockát feldobunk n alkalommal. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 5-tel?

Első megoldás. Minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $r = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén legyen

$$A_{n,r} := \Big\{\, n \text{ dobás után a dobott számok összege 5-tel osztva } r \text{ maradékot ad} \Big\}.$$

Legyen továbbá $p_n^{(r)} := P(A_{n,r})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $r = 0, 1, 2, 3, 4$. Ekkor

$$p_0^{(0)} = 1, \qquad p_0^{(1)} = p_0^{(2)} = p_0^{(3)} = p_0^{(4)} = 0.$$

Továbbá, $n > 0$ esetén, a teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned}
p_n^{(0)} = P(A_{n,0}) &= \sum_{i=0}^{4} P(A_{n,0} \mid A_{n-1,i}) P(A_{n-1,i}) = \sum_{i=0}^{4} P(A_{n,0} \mid A_{n-1,i}) p_{n-1}^{(i)} \\
&= P(\text{az n-edik dobás 5})\, p_{n-1}^{(0)} + P(\text{az n-edik dobás 4})\, p_{n-1}^{(1)} \\
&\quad + P(\text{az n-edik dobás 3})\, p_{n-1}^{(2)} + P(\text{az n-edik dobás 2})\, p_{n-1}^{(3)} \\
&\quad + P(\text{az n-edik dobás 1 vagy 6})\, p_{n-1}^{(4)} \\
&= \frac{1}{6} p_{n-1}^{(0)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(3)} + \frac{2}{6} p_{n-1}^{(4)}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan kaphatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p_n^{(1)} &= \frac{2}{6} p_{n-1}^{(0)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(3)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(4)}, \\
p_n^{(2)} &= \frac{1}{6} p_{n-1}^{(0)} + \frac{2}{6} p_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(3)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(4)}, \\
p_n^{(3)} &= \frac{1}{6} p_{n-1}^{(0)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(1)} + \frac{2}{6} p_{n-1}^{(2)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(3)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(4)}, \\
p_n^{(4)} &= \frac{1}{6} p_{n-1}^{(0)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(1)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(2)} + \frac{2}{6} p_{n-1}^{(3)} + \frac{1}{6} p_{n-1}^{(4)}.
\end{aligned}$$

Mátrixos formában összefoglalva:

$$\begin{pmatrix} p_n^{(0)} \\ p_n^{(1)} \\ p_n^{(2)} \\ p_n^{(3)} \\ p_n^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1}^{(0)} \\ p_{n-1}^{(1)} \\ p_{n-1}^{(2)} \\ p_{n-1}^{(3)} \\ p_{n-1}^{(4)} \end{pmatrix}, \qquad n \geqslant 1,$$

és

$$\begin{pmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \\ p_0^{(2)} \\ p_0^{(3)} \\ p_0^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Így

$$\begin{pmatrix} p_n^{(0)} \\ p_n^{(1)} \\ p_n^{(2)} \\ p_n^{(3)} \\ p_n^{(4)} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n \geqslant 0,$$

ahol

$$A := \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix diagonalizálhatóságát vizsgálva lehetne szisztematikusan eljárni, ez azonban a jelen esetben bonyolult, mert lesznek komplex sajátértékek is. Ezért az alábbiakban nem lineáris algebrai eszközöket használva fejezzük be a megoldást.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$(1.1.2) \qquad p_n^{(r)} = \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^n} & \text{ha} \quad n \equiv r \mod 5, \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^n} & \text{ha} \quad n \not\equiv r \mod 5, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad r = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Ha $n = 0$, úgy teljesül (1.1.2), hiszen

$$p_0^{(r)} = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad r = 0, \\ 0 & \text{ha} \quad r = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén teljesül (1.1.2). Ekkor, ha $n \equiv 0 \mod 5$, úgy $n + 1 \equiv 1 \mod 5$, és

$$\begin{pmatrix} p_{n+1}^{(0)} \\ p_{n+1}^{(1)} \\ p_{n+1}^{(2)} \\ p_{n+1}^{(3)} \\ p_{n+1}^{(4)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^n} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^n} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^n} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^n} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^n} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^n} - \frac{3}{5\cdot 6^n} - \frac{2}{5\cdot 6^n} \\ \frac{6}{5} + \frac{8}{5\cdot 6^n} - \frac{4}{5\cdot 6^n} \\ \frac{6}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^n} - \frac{2}{5\cdot 6^n} - \frac{3}{5\cdot 6^n} \\ \frac{6}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^n} - \frac{2}{5\cdot 6^n} - \frac{3}{5\cdot 6^n} \\ \frac{6}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^n} - \frac{2}{5\cdot 6^n} - \frac{3}{5\cdot 6^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^{n+1}} \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^{n+1}} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^{n+1}} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^{n+1}} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Az $n \equiv 1$, $n \equiv 2$, $n \equiv 3$, és $n \equiv 4 \mod 5$ esetek hasonlóan vizsgálhatók meg. (Látjuk, hogy ezen megoldás során nem csak annak a valószínűségét számoltuk ki, hogy 5-tel osztható lesz az eredmény.)

Második megoldás. Minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén legyen

$$p_k := P(n \text{ dobás során a dobott számok összege } k).$$

Jelölje ξ az n dobás során dobott számok összegét. Ekkor ξ felírható $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ alakban, ahol ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, az i-edik dobás során dobott számot jelöli. Továbbá, felhasználva, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek, kapjuk, hogy ξ generátorfüggvénye:

$$f_\xi(x) := \mathbb{E}x^\xi = (\mathbb{E}x^{\xi_1})^n = \left(\frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{6}\right)^n, \qquad |x| \leqslant 1, \tag{1.1.3}$$

illetve, a generátorfüggvény definíciójában szereplő várható értéket másként felírva

$$f_\xi(x) = \sum_{k=1}^\infty x^k p_k, \qquad |x| \leqslant 1. \tag{1.1.4}$$

Célunk a

$$P\Big(n \text{ dobás során a dobott számok összege osztható 5-tel}\Big) = \sum_{k=1}^\infty p_{5k},$$

valószínűséget kiszámolni. Legyen

$$\varepsilon := \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right),$$

azaz ε a második 5. egységgyök. Ekkor (1.1.4) alapján

$$f_\xi(1) + f_\xi(\varepsilon) + f_\xi(\varepsilon^2) + f_\xi(\varepsilon^3) + f_\xi(\varepsilon^4) = \sum_{k=1}^\infty p_k\big(1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{4k}\big) = 5\sum_{k=1}^\infty p_{5k},$$

hiszen

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \varepsilon^{3k} + \varepsilon^{4k} = \begin{cases} \frac{\varepsilon^{5k}-1}{\varepsilon^k - 1} = 0 & \text{ha } \ k \not\equiv 0 \mod 5, \\ 5 & \text{ha } \ k \equiv 0 \mod 5. \end{cases}$$

Így

$$\sum_{k=1}^\infty p_{5k} = \frac{1}{5}\big(f_\xi(1) + f_\xi(\varepsilon) + f_\xi(\varepsilon^2) + f_\xi(\varepsilon^3) + f_\xi(\varepsilon^4)\big).$$

Az alábbiakban kiszámoljuk az $f_\xi(\varepsilon^i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, mennyiségeket. Mivel p_k, $k = 1, 2, \ldots$, diszkrét valószínűségeloszlás, kapjuk, hogy $f_\xi(1) = \sum_{k=1}^\infty p_k = 1$. Továbbá, felhasználva (1.1.3)-t, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_\xi(\varepsilon^j) &= \sum_{k=1}^\infty p_k \varepsilon^{jk} = \left(\frac{\varepsilon^j + \varepsilon^{2j} + \varepsilon^{3j} + \varepsilon^{4j} + \varepsilon^{5j} + \varepsilon^{6j}}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}\left(\varepsilon^j \frac{\varepsilon^{6j} - 1}{\varepsilon^j - 1}\right)^n \\ &= \frac{1}{6^n}\varepsilon^{nj}\left(\frac{\varepsilon^j - 1}{\varepsilon^j - 1}\right)^n = \frac{\varepsilon^{nj}}{6^n}, \qquad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti egyenlőség abból következik, hogy $\varepsilon^{5n} = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{5k} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{\varepsilon^n}{6^n} + \frac{\varepsilon^{2n}}{6^n} + \frac{\varepsilon^{3n}}{6^n} + \frac{\varepsilon^{4n}}{6^n}\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 6^n}\varepsilon^n \frac{\varepsilon^{4n}-1}{\varepsilon^n - 1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6^n} & \text{ha} \quad n \not\equiv 0 \mod 5, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{5\cdot 6^n} \cdot 4 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5\cdot 6^n} & \text{ha} \quad n \equiv 0 \mod 5. \end{cases}$$

□

1.1.6. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 3.11.4. nyomán) Tekintsük az alábbi $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt:

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \qquad \mathcal{A} := 2^{\Omega}, \qquad P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) := \frac{1}{3}.$$

Legyen

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \;\; X(\omega_1) := 1,\, X(\omega_2) := 2,\, X(\omega_3) := 3,$$
$$Y : \Omega \to \mathbb{R}, \;\; Y(\omega_1) := 2,\, Y(\omega_2) := 3,\, Y(\omega_3) := 1.$$

(i) Írjuk fel $\mathcal{A}$ elemeit!

(ii) Igazoljuk, hogy X és Y valószínűségi változók!

(iii) Határozzuk meg X és Y eloszlását!

(iv) Írjuk fel X és Y eloszlásfüggvényét!

(v) Létezik-e X-nek, illetve Y-nak sűrűségfüggvénye?

Megoldás. (i): Az $\mathcal{A}$ σ-algebrának összesen $2^3 = 8$ eleme van:

$$\emptyset,\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},\ \{\omega_1\},\ \{\omega_2\},\ \{\omega_3\},\ \{\omega_1, \omega_2\},\ \{\omega_1, \omega_3\},\ \{\omega_2, \omega_3\}.$$

(ii): Azt kell megmutatni, hogy $\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, illetve $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Felhasználva, hogy $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$, és azt, hogy $\mathcal{A}$-ban Ω-nak minden részhalmaza benne van, kapjuk a dolgot.

(iii): Az X valószínűségi változó P_X eloszlása valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en: $P_X(B) := P(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ekkor

$$P_X(B) = P(X \in B) = P\big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}\big) = \sum_{\{i \in \{1,2,3\} :\, X(\omega_i) \in B\}} \frac{1}{3}$$
$$= \sum_{\{i \in \{1,2,3\} :\, i \in B\}} \frac{1}{3} = \frac{\sharp\{i \in \{1,2,3\} : i \in B\}}{3} = \frac{1}{3}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)(B),$$

ahol tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén δ_x az x pontba koncentrálódó Dirac-mértéket jelöli:

$$\delta_x(B) := \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \in B, \\ 0 & \text{ha} \quad x \notin B, \end{cases} \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Az Y valószínűségi változó P_Y eloszlása valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en: $P_Y(B) := P(Y \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ekkor

$$\begin{aligned} P_Y(B) &= P(Y \in B) = P\big(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}\big) = \sum_{\{i \in \{1,2,3\} :\, Y(\omega_i) \in B\}} \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sharp\{i \in \{1,2,3\} : i \in B\}}{3} = \frac{1}{3}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)(B). \end{aligned}$$

(Vegyük észre, hogy $Y(\omega_i) \neq i$, $i = 1, 2, 3$.)

Látjuk, hogy X és Y különböző valószínűségi változók ugyanazon eloszlással.

(iv): Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_X(x) := P(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\text{Ha } x \leqslant 1: && F_X(x) = P(\emptyset) = 0, \\ &\text{Ha } 1 < x \leqslant 2: && F_X(x) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{3}, \\ &\text{Ha } 2 < x \leqslant 3: && F_X(x) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{2}{3}, \\ &\text{Ha } x > 3: && F_X(x) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Az Y valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_Y(x) := P(Y < x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\text{Ha } x \leqslant 1: && F_Y(x) = P(\emptyset) = 0, \\ &\text{Ha } 1 < x \leqslant 2: && F_Y(x) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}, \\ &\text{Ha } 2 < x \leqslant 3: && F_Y(x) = P(\{\omega_3, \omega_1\}) = \frac{2}{3}, \\ &\text{Ha } x > 3: && F_Y(x) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \frac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy X és Y különböző valószínűségi változók ugyanazon eloszlásfüggvénnyel. (Tudjuk, hogy, ha ξ és η valószínűségi változók, úgy $P_\xi = P_\eta$ akkor és csak akkor, ha $F_\xi = F_\eta$, azaz az eloszlás és az eloszlásfüggvény kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást.)

(v): Nem léteznek a sűrűségfüggvények, mert X és Y diszkrét valószínűségi változók. □

1.1.7. Feladat. (Rényi [2], 2.6.19.) Legyenek X és Y független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $|X| \cdot \operatorname{sgn}(Y)$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Az $|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$\begin{aligned}F_{|X|\cdot\mathrm{sgn}(Y)}(x) &= P(|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y) < x)\\ &= P\big(|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y) < x, Y > 0\big) + P\big(|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y) < x, Y \leqslant 0\big), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy X és Y függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&P\big(|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y) < x, Y > 0\big) = P\big(|X| < x, Y > 0\big) = P(|X| < x)P(Y > 0)\\ &\quad = P(|X| < x)\frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}P\big(|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y) < x, Y \leqslant 0\big) &= P\big(|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y) < x, Y < 0\big) + P\big(|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y) < x, Y = 0\big)\\ &= P(-|X| < x, Y < 0) + P(0 < x, Y = 0) = P(-|X| < x)P(Y < 0)\\ &= P(-|X| < x)\frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$F_{|X|\cdot\mathrm{sgn}(Y)}(x) = \frac{1}{2}\big(P(|X| < x) + P(|X| > -x)\big) = \frac{1}{2}\big(P(|X| < x) + 1 - P(|X| \leqslant -x)\big).$$

Ezért, ha $x \geqslant 0$, úgy

$$F_{|X|\cdot\mathrm{sgn}(Y)}(x) = \frac{1}{2}\big(P(-x < X < x) + 1 - 0\big) = \frac{1}{2}(1 + \Phi(x) - \Phi(-x)) = \Phi(x),$$

illetve, $x < 0$ esetén

$$F_{|X|\cdot\mathrm{sgn}(Y)}(x) = \frac{1}{2}\big(0 + 1 - P(x \leqslant X \leqslant -x)\big) = \frac{1}{2}(1 - \Phi(-x) + \Phi(x)) = \Phi(x).$$

Tehát $F_{|X|\cdot\mathrm{sgn}(Y)}(x) = \Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$, azaz $|X| \cdot \mathrm{sgn}(Y)$ standard normális eloszlású, és

$$f_{|X|\cdot\mathrm{sgn}(Y)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

1.1.8. Feladat. Az $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

eloszlásfüggvényű eloszlást $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ paraméterű logisztikus eloszlásnak nevezzük és $Log(\mu, \sigma)$ módon jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $\xi \sim Log(0, 1)$ és $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, úgy $\sigma\xi + \mu \sim Log(\mu, \sigma)$. (Tehát μ hely-, σ pedig skálaparaméter.)

(b) ha ξ egyenletes eloszlású $(0,a)$-n, akkor $\log\left(\frac{\xi}{a-\xi}\right) \sim Log(0,1)$. (Ezért hívják logisztikus eloszlásnak.)

(c) ha $\eta_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $\eta_2 \sim Exp(\lambda_2)$ függetlenek, úgy $\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \sim Log(\log\lambda_2 - \log\lambda_1, 1)$.

(d) Számítsuk ki a $Log(\mu,\sigma)$-eloszlás várható értékét!

Megoldás. (a): A $\sigma\xi+\mu$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_{\sigma\xi+\mu}(x) = P(\sigma\xi+\mu < x) = P\left(\xi < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}, \quad x\in\mathbb{R},$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$F_\xi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

(b): A $\log\left(\frac{\xi}{a-\xi}\right)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}
F_{\log\left(\frac{\xi}{a-\xi}\right)}(x) &= P\left(\log\left(\frac{\xi}{a-\xi}\right) < x\right) = P\left(\frac{\xi}{a-\xi} < e^x\right)\\
&= P(\xi < (a-\xi)e^x) = P(\xi(1+e^x) < ae^x) = P\left(\xi < \frac{ae^x}{1+e^x}\right)\\
&= \frac{\frac{ae^x}{1+e^x} - 0}{a-0} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(c): Azt fogjuk kihasználni, hogy $\xi\sim Exp(\lambda)$ akkor és csak akkor, ha bármilyen $c>0$ esetén $c\xi \sim Exp(\frac{\lambda}{c})$. Legyen $\widetilde{\eta}_1 := \lambda_1\eta_1$ és $\widetilde{\eta}_2 := \lambda_2\eta_2$. Ekkor $\widetilde{\eta}_1 \sim Exp(1)$, $\widetilde{\eta}_2 \sim Exp(1)$, illetve $\widetilde{\eta}_1$ és $\widetilde{\eta}_2$ függetlenek. Továbbá

$$\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = \log\left(\frac{\frac{\widetilde{\eta}_1}{\lambda_1}}{\frac{\widetilde{\eta}_2}{\lambda_2}}\right) = \log\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = \log\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}\right) + \log\lambda_2 - \log\lambda_1.$$

Az (a) rész alapján elég belátni, hogy $\log\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}\right) \sim Log(0,1)$.

A (b) rész alapján, ha belátjuk, hogy $\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2} \sim \frac{\xi}{1-\xi}$, ahol ξ egyenletes eloszlású $(0,1)$-en, úgy kapjuk, hogy $\log\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}\right) \sim Log(0,1)$. Felhasználva, hogy $\widetilde{\eta}_1$ és $\widetilde{\eta}_2$ függetlenek, és azt, hogy $P(\widetilde{\eta}_2 > 0) = 1$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
F_{\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}}(x) &= P\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2} < x\right) = P(\widetilde{\eta}_1 < x\widetilde{\eta}_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{y_1<xy_2\}}\,\mathsf{d}F_{\widetilde{\eta}_1,\widetilde{\eta}_2}(y_1,y_2)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{y_1<xy_2\}} f_{\widetilde{\eta}_1}(y_1) f_{\widetilde{\eta}_2}(y_2)\,\mathsf{d}y_1\,\mathsf{d}y_2, \quad x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ha $x\leqslant 0$, úgy $F_{\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}}(x) = 0$, ha pedig $x>0$, úgy

$$\begin{aligned}
F_{\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}}(x) &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{y_1/x}^{+\infty} f_{\widetilde{\eta}_1}(y_1) f_{\widetilde{\eta}_2}(y_2)\,\mathsf{d}y_2\right)\mathsf{d}y_1 = \int_0^{+\infty}\left(\int_{y_1/x}^{+\infty} e^{-y_1}e^{-y_2}\,\mathsf{d}y_2\right)\mathsf{d}y_1\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-y_1}\big[-e^{-y_2}\big]_{y_1/x}^{+\infty}\,\mathsf{d}y_1 = \int_0^{+\infty} e^{-y_1}e^{-y_1/x}\,\mathsf{d}y_1 = \left[-\frac{e^{-y_1(1+1/x)}}{1+\frac{1}{x}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$F_{\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Továbbá, ha $x \leqslant 0$, akkor $F_{\frac{\xi}{1-\xi}}(x) = 0$, ha pedig $x > 0$, úgy

$$\begin{aligned} F_{\frac{\xi}{1-\xi}}(x) &= P\left(\frac{\xi}{1-\xi} < x\right) = P(\xi < (1-\xi)x) = P(\xi(1+x) < x) = P\left(\xi < \frac{x}{1+x}\right) \\ &= \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Ezért $F_{\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}}(x) = F_{\frac{\xi}{1-\xi}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(d): Ha $\eta \sim Log(\mu, \sigma)$, úgy $\frac{\eta-\mu}{\sigma} \sim Log(0,1)$, az (a) rész alapján. Illetve, ha $\xi \sim Log(0,1)$, úgy $\sigma\xi + \mu \sim Log(\mu, \sigma)$. Ezért

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}(\sigma\xi + \mu) = \sigma\mathbb{E}\xi + \mu.$$

Így látjuk, hogy elég ξ várható értékét kiszámolni. Felhasználva ξ eloszlásfüggvényének alakját kapjuk, hogy ξ abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1}{(e^{x/2}+e^{-x/2})^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Először leellenőrizzük, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathsf{d}x < +\infty.$$

Valóban,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)\,\mathsf{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{(e^{x/2}+e^{-x/2})^2}\,\mathsf{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{(e^{x/2}+e^{-x/2})^2}\,\mathsf{d}x \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathsf{d}x \leqslant 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}\,\mathsf{d}x = 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathsf{d}x = 2 < +\infty. \end{aligned}$$

Ezért

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,\mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{(e^{x/2}+e^{-x/2})^2}\,\mathsf{d}x = 0,$$

hiszen az integrandus páratlan függvény. Így $\mathbb{E}\eta = \sigma \cdot 0 + \mu = \mu$. $\square$

1.1.9. Feladat. Tetszőleges $p > 0$ és $\sigma > 0$ esetén az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{p}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{p-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^p} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű eloszlást p és σ paraméterű Weibull eloszlásnak hívjuk és $W(p, \sigma)$ módon jelöljük. Mutassuk meg, hogy

(a) $W(1, \frac{1}{\lambda}) \sim Exp(\lambda)$ minden $\lambda > 0$-ra.

(b) ha $\xi \sim W(1,1)$ és $p > 0$, $\sigma > 0$, úgy $\sigma\xi^{\frac{1}{p}} \sim W(p,\sigma)$.

(c) ha $\eta_1 \sim W(p,\sigma_1)$ és $\eta_2 \sim W(p,\sigma_2)$ függetlenek, úgy $\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)$ logisztikus eloszlású, pontosabban

$$\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \sim Log\left(\log\sigma_1 - \log\sigma_2, \frac{1}{p}\right).$$

Megoldás. (a): Valóban,

$$f_{W(1,1/\lambda)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1/\lambda}\left(\frac{x}{1/\lambda}\right)^{1-1} e^{-\left(\frac{x}{1/\lambda}\right)^1} = \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

(b): Minden $x > 0$ esetén

$$F_{\sigma\xi^{1/p}}(x) = P(\sigma\xi^{\frac{1}{p}} < x) = P\left(\xi^{\frac{1}{p}} < \frac{x}{\sigma}\right) = P\left(\xi < \left(\frac{x}{\sigma}\right)^p\right) = F_\xi\left(\left(\frac{x}{\sigma}\right)^p\right).$$

Ezért $x > 0$ esetén, felhasználva az (a) részt is,

$$f_{\sigma\xi^{1/p}}(x) = f_\xi\left(\left(\frac{x}{\sigma}\right)^p\right)\frac{1}{\sigma^p}px^{p-1} = e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^p}\frac{1}{\sigma^p}px^{p-1} = \frac{p}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{p-1}e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^p}.$$

Ha pedig $x \leqslant 0$, úgy $f_{\sigma\xi^{1/p}}(x) = 0$. Így kapjuk a (b) rész állítását.

(c): Legyenek

$$\widetilde{\eta}_1 := \left(\frac{\eta_1}{\sigma_1}\right)^p, \qquad \widetilde{\eta}_2 := \left(\frac{\eta_2}{\sigma_2}\right)^p.$$

Ekkor $\widetilde{\eta}_1$ és $\widetilde{\eta}_2$ függetlenek, és a (b) rész alapján $\widetilde{\eta}_1 \sim W(1,1) \sim Exp(1)$, illetve $\widetilde{\eta}_2 \sim W(1,1) \sim Exp(1)$. Továbbá, $\eta_1 = \sigma_1\widetilde{\eta}_1^{\frac{1}{p}}$ és $\eta_2 = \sigma_2\widetilde{\eta}_2^{\frac{1}{p}}$, valamint

$$\log\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = \log\left(\frac{\sigma_1\widetilde{\eta}_1^{\frac{1}{p}}}{\sigma_2\widetilde{\eta}_2^{\frac{1}{p}}}\right) = \frac{1}{p}\log\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}\right) + \log\sigma_1 - \log\sigma_2.$$

Így az 1.1.8. Feladat (a) része alapján elég azt belátni, hogy

$$\log\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}\right) \sim Log(0,1).$$

Mivel $\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2 \sim Exp(1)$, függetlenek, az 1.1.8. Feladat (c) része alapján

$$\log\left(\frac{\widetilde{\eta}_1}{\widetilde{\eta}_2}\right) \sim Log(\log 1 - \log 1, 1) = Log(0,1).$$

□

1.1.10. Feladat. Legyen (ξ, η) együttes eloszlásfüggvénye $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) := \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y} & \text{ha} \quad x > 0, \ y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat, és a $P(\xi < 1, \eta < 1)$ valószínűséget!

Megoldás. Ekkor $F(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$, ha $x > 0, y > 0$, és

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Azaz ξ 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Hasonlóan, η is 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

A fentiek alapján nyilván az is következik, hogy $F(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, azaz ξ és η függetlenek.

Végül $P(\xi < 1, \eta < 1) = F_{\xi,\eta}(1,1) = (1 - e^{-1})^2$. □

1.1.11. Feladat. (Rényi [2], 2.2.1.) Eloszlásfüggvény-e az alábbi két függvény?

(i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) := \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-(x+y)}}$, $x, y \in \mathbb{R}$,

(ii) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) := \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Megoldás. (i): Nem, mert ha F eloszlásfüggvény lenne, akkor a $(0,0)$, $(0,b)$, $(b,0)$ és (b,b) csúcspontú téglalapba ,,esés" valószínűségének $b \to \infty$ esetén vett határértéke nemnegatív lenne. Azonban

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \Big(F(b,b) - F(b,0) - F(0,b) + F(0,0)\Big) &= \lim_{b\to\infty} \Big(\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-2b}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-b}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-b}} + \mathrm{e}^{-1}\Big) \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 < 0. \end{aligned}$$

(ii): Igen. Valóban,

$$F(x,y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-y}} =: F_1(x)F_1(y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

és

(a) F mindkét változójának balról folytonos függvénye.

(b)
$$\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} F_1(x) \lim_{y\to\infty} F_1(y) = 1 \cdot 1 = 1.$$

(c)

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = F_1(y) \lim_{x\to-\infty} F_1(x) = 0, \qquad \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0.$$

(d)

$$\begin{aligned}
F(b_1,b_2) &- F(a_1,b_2) - F(a_2,b_1) + F(a_1,a_2) \\
&= F_1(b_1)F_1(b_2) - F_1(a_1)F_1(b_2) - F_1(a_2)F_1(b_1) + F_1(a_1)F_1(a_2) \\
&= F_1(b_1)(F_1(b_2) - F_1(a_2)) + F_1(a_1)(F_1(a_2) - F_1(b_2)) \\
&= (F_1(b_2) - F_1(a_2))(F_1(b_1) - F_1(a_1)) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

□

1.1.12. Feladat. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon. Létezik-e $\eta := \tan\xi$ várható értéke?

Megoldás. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant -\pi/2, \\ \frac{x+\pi/2}{\pi} & \text{ha} \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \\ 1 & \text{ha} \quad x \geqslant \pi/2. \end{cases}$$

Első megoldás. Meghatározzuk η eloszlását:

$$\begin{aligned}
F_\eta(x) &= P(\eta < x) = P(\tan\xi < x) = P(\arctan(\tan\xi) < \arctan x) = P(\xi < \arctan x) \\
&= \frac{\arctan x + \pi/2}{\pi}, \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

hiszen $\xi \in (-\pi/2, \pi/2)$ és $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \in \mathbb{R}$. Így

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

azaz η Cauchy eloszlású. Ismert, hogy a Cauchy eloszlásnak nem létezik a várható értéke, így η-nak nem létezik a várható értéke. Valóban,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)} \,\mathsf{d}x = +\infty.$$

Ugyanis,

$$\int_0^\infty x \frac{1}{1+x^2} \,\mathsf{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^t = +\infty,$$

és hasonlóan $\int_{-\infty}^0 x \frac{1}{1+x^2} \,\mathsf{d}x = -\infty$.

Második megoldás. Vizsgáljuk az

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\tan x| \frac{1}{\pi} \,\mathsf{d}x$$

integrál végességét. A $|\tan|$ függvény párosságát felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\tan x| \, \mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi/2} \tan x \, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\pi/2} -(\ln(\cos x))' \, \mathrm{d}x = 2\left[-\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/2} \\ &= -2\lim_{x\uparrow\pi/2} \ln(\cos x) = +\infty.\end{aligned}$$

Így nem létezik η-nak várható értéke. □

1.1.13. Feladat. (Rényi [2], 2.6.15.) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Létezik-e $\frac{1}{\xi^2}$ várható értéke? Feltéve, hogy igen, véges-e ez a várható érték?

Megoldás. Mivel ξ abszolút folytonos eloszlású, $P(\xi = 0) = 0$, és így $\frac{1}{\xi^2}$ 1-valószínűséggel értelmezett.

Definíció szerint akkor mondjuk, hogy ξ-nek létezik a várható értéke, ha az $\mathbb{E}\xi^+$ és $\mathbb{E}\xi^-$ várható értékek közül legalább az egyik véges és ekkor $\mathbb{E}\xi := \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$. (Itt $\xi^+ := \max(\xi, 0)$, $\xi^- := -\min(\xi, 0)$, és $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $|\xi| = \xi^+ + \xi^-$.)

Továbbá, definíció szerint akkor mondjuk, hogy ξ-nek véges a várható értéke (integrálható), ha az $\mathbb{E}\xi^+$ és $\mathbb{E}\xi^-$ várható értékek végesek.

Mivel $\frac{1}{\xi^2} \geqslant 0$, kapjuk, hogy $\left(\frac{1}{\xi^2}\right)^- = 0$, és így

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\xi^2}\right)^- = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\xi^2}\text{-nek létezik a várható értéke.}$$

El kell döntenünk, hogy $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$ véges-e vagy nem. Ehhez először meghatározzuk $\frac{1}{\xi^2}$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Ha $x \leqslant 0$, úgy

$$F_{\frac{1}{\xi^2}}(x) = P\left(\frac{1}{\xi^2} < x\right) = 0.$$

Ha $x > 0$, úgy

$$\begin{aligned}F_{\frac{1}{\xi^2}}(x) &= P\left(\frac{1}{\xi^2} < x\right) = P\left(\frac{1}{x} < \xi^2\right) = 1 - P\left(\xi^2 \leqslant \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= 1 - P\left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \xi < \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \\ &= 1 - \left(2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

Így $\frac{1}{\xi^2}$ sűrűségfüggvénye

$$f_{\frac{1}{\xi^2}}(x) = \begin{cases} -2f_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2x}}\frac{1}{x^{3/2}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ahhoz, hogy $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$ véges legyen az alábbi integrál végességét kell vizsgálni

$$\int_0^\infty x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^{3/2}}e^{-\frac{1}{2x}}\,\mathsf{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{2x}}\,\mathsf{d}x.$$

Felhasználva, hogy az integrandus nemnegatív és azt, hogy $x \geqslant 1$ esetén $e^{-\frac{1}{2x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{2x}}\,\mathsf{d}x &\geqslant \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{2x}}\,\mathsf{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2e\pi}}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{\sqrt{2e\pi}}\left[\frac{\sqrt{x}}{1/2}\right]_1^\infty \\ &= \frac{2}{\sqrt{2e\pi}}(\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}-1) = +\infty.\end{aligned}$$

Így $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\xi^2}\right) = +\infty.$ □

1.1.14. Feladat. Számoljuk ki a p-edrendű, λ paraméterű Gamma-eloszlás n-edik momentumát!

Megoldás. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $u = \lambda x$ helyettesítést végrehajtva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi^n &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,\mathsf{d}x = \int_0^{+\infty} x^n\frac{\lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)}\,\mathsf{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{\lambda}\right)^n\frac{\lambda^p(u/\lambda)^{p-1}e^{-u}}{\Gamma(p)}\frac{1}{\lambda}\,\mathsf{d}u = \frac{1}{\lambda^n\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}u^{p+n-1}e^{-u}\,\mathsf{d}u = \frac{\Gamma(p+n)}{\lambda^n\Gamma(p)}.\end{aligned}$$

□

1.1.15. Feladat. Legyen $\xi \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, ahol $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}\xi = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \mathbb{D}^2\xi = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)}(x)\,\mathsf{d}x = \int_0^1 x\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\,\mathsf{d}x = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Továbbá,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi^2 &= \int_0^1 x^2\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\,\mathsf{d}x = \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)},\end{aligned}$$

és így

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.\end{aligned}$$

□

1.1.16. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $X \sim \Gamma(p,\lambda)$ és $Y \sim \Gamma(q,\lambda)$ függetlenek, akkor

$$\frac{X}{X+Y} \sim \mathrm{Beta}(p,q).$$

Megoldás. $X/(X+Y)$ sűrűségfüggvényét határozzuk meg. Oly módon tesszük ezt, hogy X és Y együttes sűrűségfüggvényét úgy transzformáljuk, hogy az egyik marginális $X/(X+Y)$ legyen, és meghatározzuk ezen marginális sűrűségfüggvényét. Felhasználjuk a következő tételt.

Tétel: Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ abszolút folytonos valószínűségi változó, f_ξ sűrűségfüggvénnyel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, melyre $P(\xi \in D) = 1$. Legyen továbbá $g : D \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, mely kölcsönösen egyértelmű D-n, és Jacobi-determinánsa nem nulla. (Ekkor $g(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt és a $h : g(D) \to D$ inverzfüggvény folytonosan differenciálható, nemnulla Jacobi-determinánssal.) Továbbá az $\eta := g(\xi)$ valószínűségi változó is abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} f_\xi(h(y))|J_h(y)| & \text{ha} \quad y \in g(D), \\ 0 & \text{ha} \quad y \notin g(D), \end{cases}$$

ahol $J_h(y)$ jelöli h Jacobi determinánsát az y helyen.

Ekkor X és Y együttes sűrűségfüggvénye, felhasználva a függetlenségüket

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)}\frac{\lambda^q y^{q-1}e^{-\lambda y}}{\Gamma(q)} & \text{ha} \quad x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fenti tételt alkalmazzuk $\xi := (X,Y)$, $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ választásokkal. Ekkor D nyílt és

$$P(\xi \in D) = P(X > 0, Y > 0) = 1.$$

A következő transzformációt hajtsuk végre

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} \frac{X}{X+Y} \\ Y \end{pmatrix},$$

formálisan, legyen $g : D \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y} \\ y \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in D.$$

Ekkor g folytonosan differenciálható D-n, mert

$$\frac{\partial}{\partial x} g_1(x,y) = \frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y) = -\frac{x}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} g_2(x,y) = 1$$

léteznek és folytonosak D-n. Továbbá g Jacobi determinánsa

$$J_g(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{y}{(x+y)^2} & -\frac{x}{(x+y)^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{y}{(x+y)^2} \neq 0, \quad (x,y) \in D.$$

Így alkalmazhatjuk a fent idézett tételt. Meghatározzuk most g inverzét. Legyen minden $(x,y) \in D$ esetén $u := x/(x+y)$ és $v := y$. Ekkor $x = uv/(1-u)$, és g inverze $h : g(D) \to \mathbb{R}^2$,

$$(u,v) \longmapsto h(u,v) := \begin{pmatrix} \frac{uv}{1-u} \\ v \end{pmatrix},$$

ahol $g(D) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1, v > 0\}$. Továbbá h Jacobi determinánsa

$$J_h(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{v}{(1-u)^2} & \frac{u}{1-u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{v}{(1-u)^2} \neq 0, \quad \text{ha } (u,v) \in g(D).$$

Mivel $g(X,Y) = (X/(X+Y), Y)$, a fent idézett tétel alapján kapjuk, hogy

$$f_{(X/(X+Y),Y)}(u,v) = 0, \qquad \text{ha } (u,v) \notin g(D).$$

Abban az esetben, ha $(u,v) \in g(D)$, azaz $u \in (0,1)$ és $v > 0$, akkor

$$f_{(X/(X+Y),Y)}(u,v) = f_{(X,Y)}\left(\frac{uv}{1-u}, v\right) \frac{v}{(1-u)^2} = \frac{\lambda^p \left(\frac{uv}{1-u}\right)^{p-1} e^{-\lambda \frac{uv}{1-u}} \lambda^q v^{q-1} e^{-\lambda v}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{v}{(1-u)^2}.$$

És ezért minden $u \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_{X/(X+Y)}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X/(X+Y),Y)}(u,v)\,\mathsf{d}v = \int_0^{+\infty} f_{(X/(X+Y),Y)}(u,v)\,\mathsf{d}v.$$

Ha $u \notin (0,1)$, akkor $f_{X/(X+Y)}(u) = 0$. Abban az esetben, ha $u \in (0,1)$, akkor

$$f_{X/(X+Y)}(u) = \frac{\lambda^p \lambda^q u^{p-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)(1-u)^{p+1}} \int_0^{+\infty} v^{p+q-1} e^{-\lambda \frac{v}{1-u}}\,\mathsf{d}v.$$

Végrehajtva az $x := v/(1-u)$ helyettesítést, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f_{X/(X+Y)}(u) &= \frac{\lambda^{p+q} u^{p-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)(1-u)^{p+1}} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1}(1-u)^{p+q-1} e^{-\lambda x}(1-u)\,\mathsf{d}x \\
&= \frac{\lambda^{p+q} u^{p-1}(1-u)^{q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-\lambda x}\,\mathsf{d}x \\
&= \frac{u^{p-1}(1-u)^{q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{p+q} x^{p+q-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(p+q)}\,\mathsf{d}x \\
&= \frac{u^{p-1}(1-u)^{q-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \Gamma(p+q) = \frac{u^{p-1}(1-u)^{q-1}}{B(p,q)},
\end{aligned}$$

hiszen $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p,q)$. Tehát

$$f_{X/(X+Y)}(u) = \begin{cases} \frac{u^{p-1}(1-u)^{q-1}}{B(p,q)} & \text{ha} \quad u \in (0,1), \\ 0 & \text{ha} \quad u \notin (0,1), \end{cases}$$

ez pedig nem más, mint a $\mathrm{Beta}(p,q)$ eloszlás sűrűségfüggvénye. □

1.1.17. Feladat. Legyenek $X_1,\ldots,X_n$ független, λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók. Adjuk meg $X_1,\ldots,X_n$-nek egy olyan kifejezését, melynek várható értéke λ^2. (Más szavakkal, adjunk torzítatlan becslést λ^2-re.)

Megoldás. Leellenőrizzük, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(X_i-1) \quad \text{egy jó választás.}$$

Valóban,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i(X_i-1)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2 - \lambda = \frac{1}{n}n(\lambda+\lambda^2) - \lambda = \lambda^2.$$

□

1.1.18. Feladat. Legyenek $X_n,\, n \geqslant 1$ azonos eloszlású valószínűségi változók és tegyük fel, hogy közülük bármelyik kettő különböző korrelációs együtthatója ρ. Mutassuk meg, hogy $\rho \geqslant 0$.

Megoldás. Feltehetjük, hogy $\mathbb{E}X_n = 0$, $\mathbb{D}^2 X_n = 1$, $n \geqslant 1$, mert áttérhetünk az $Y_n := (X_n - \mathbb{E}X_n)/\mathbb{D}X_n$, $n \geqslant 1$ sorozatra. Ugyanis

$$\mathrm{corr}(Y_i,Y_j) = \frac{\mathrm{cov}(Y_i,Y_j)}{\mathbb{D}Y_i\mathbb{D}Y_j} = \frac{\frac{1}{(\mathbb{D}X_1)^2}\mathrm{cov}(X_i,X_j)}{\frac{1}{(\mathbb{D}X_1)^2}\mathbb{D}X_i\mathbb{D}X_j} = \mathrm{corr}(X_i,X_j).$$

Ekkor $\rho = \mathrm{corr}(X_i,X_j) = \mathbb{E}(X_iX_j)$, $i \neq j$. Mivel minden $n \geqslant 1$-re $\mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^n X_i) \geqslant 0$ és

$$\mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\mathbb{D}^2X_1 + n(n-1)\mathrm{cov}(X_1,X_2) = n + n(n-1)\rho,$$

kapjuk, hogy $n + n(n-1)\rho \geqslant 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, azaz $\rho \geqslant -1/(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, és így

$$\rho \geqslant \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n-1} = 0,$$

azaz $\rho \geqslant 0$. □

1.1.19. Példa. Az általában nem igaz, hogy ha $X_1, \ldots, X_n$ azonos eloszlású valószínűségi változók és közülük bármely kettő különböző korrelációs együtthatója ρ, akkor $\rho \geqslant 0$. Ugyanis, legyenek $Y_1, \ldots, Y_n$ független, azonos eloszlású nem degenerált valószínűségi változók és

$$X_1 := Y_1 - \overline{Y}, \quad \ldots, \quad X_n := Y_n - \overline{Y},$$

ahol $\overline{Y} = (\sum_{i=1}^n Y_i)/n$. Ekkor $X_1, \ldots, X_n$ azonos eloszlásúak, hiszen

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x) &= P(X_i < x) = P(Y_i - \overline{Y} < x) \\
&= P\Big(- \frac{1}{n}Y_1 - \cdots - \frac{1}{n}Y_{i-1} + \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) Y_i - \frac{1}{n}Y_{i+1} - \cdots - \frac{1}{n}Y_n < x\Big) \\
&= P(\langle a_i, Y\rangle < x),
\end{aligned}$$

ahol

$$Y := (Y_1, \ldots, Y_n), \quad a_i := \Big(- \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Mivel egy valószínűségi változó eloszlása és karakterisztikus függvénye kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást, elég azt belátni, hogy $\langle a_j, Y\rangle$, $j = 1, \ldots, n$, karakterisztikus függvényei ugyanazok. Ekkor $Y_1, \ldots, Y_n$ függetlensége és azonos eloszlásúsága miatt minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\varphi_{\langle a_j,Y\rangle}(t) = \mathbb{E}e^{it\langle a_j,Y\rangle} = \mathbb{E}e^{it\sum_{j=1}^n a_jY_j} = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}e^{ita_jY_j} = \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(ta_j) = \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_1}(ta_j).$$

Mivel minden a_j-nek pontosan egy koordinátája $1 - 1/n$, a többi $-1/n$, a fenti kifejezés nem függ j-től. Ezért $\langle a_j, Y\rangle$, $j = 1, \ldots, n$, azonos eloszlásúak.

Továbbá $i \neq j$ esetén, mivel $Y_1, \ldots, Y_n$ függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_i, X_j) &= \operatorname{cov}(Y_i - \overline{Y}, Y_j - \overline{Y}) = \operatorname{cov}(Y_i, Y_j) - \operatorname{cov}(Y_i, \overline{Y}) - \operatorname{cov}(\overline{Y}, Y_j) + \operatorname{cov}(\overline{Y}, \overline{Y}) \\
&= \Big(0 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}n\Big) \operatorname{cov}(Y_1, Y_1) = -\frac{1}{n}\operatorname{cov}(Y_1, Y_1).
\end{aligned}$$

Mivel Y_1 nem degenerált, $\operatorname{cov}(Y_1, Y_1) > 0$, és így bármely két különböző X_i és X_j korrelációs együtthatója ugyanannyi és negatív. □

1.1.20. Feladat. (Shao [10], Exercise 9, 7. old.) Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy eloszlásfüggvény és $a \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x + a) - F(x))\,\mathrm{d}x = a.$$

Megoldás. Ha $a = 0$, úgy triviálisan teljesül a bizonyítandó azonosság.

Tegyük fel, hogy $a > 0$. (Az $a < 0$ eset teljesen hasonlóan kezelhető.) Legyen ξ egy olyan valószínűségi változó, amelynek F az eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x))\,\mathsf{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \big(P\big(\xi < x+a\big) - P(\xi < x)\big)\,\mathsf{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,x+a)}(y)\,\mathsf{d}F(y) - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,x)}(y)\,\mathsf{d}F(y) \right) \mathsf{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \Big(\mathbb{1}_{(-\infty,x+a)}(y) - \mathbb{1}_{(-\infty,x)}(y) \Big)\,\mathsf{d}x \right) \mathsf{d}F(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x,x+a)}(y)\,\mathsf{d}x \right) \mathsf{d}F(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(y-a,y]}(x)\,\mathsf{d}x \right) \mathsf{d}F(y) = \int_{\mathbb{R}} a\,\mathsf{d}F(y) = a.
\end{aligned}$$

□

1.1.21. Feladat. (Shao [10], Exercise 16, 12. old.) Legyenek F_1 és F_2 eloszlásfüggvények f_1 és f_2 sűrűségfüggvényekkel. Tegyük fel, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(c) < F_2(c)$. Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{ha} \quad x \leqslant c, \\ F_2(x) & \text{ha} \quad x > c. \end{cases}$$

(i) Mutassuk meg, hogy F eloszlásfüggvény!

(ii) Jelölje P azt, az F eloszlásfüggvényhez egyértelműen tartozó, valószínűségi mértéket $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en, melyre $P((-\infty, x)) = F(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy P abszolút folytonos $(\lambda + \delta_c)$-re nézve, ahol λ a Lebesgue-mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en és δ_c a $c \in \mathbb{R}$ pontba koncentrálódó Dirac-mérték!

Megoldás. (i): Azt kell végiggondolni, hogy F balról folytonos, monoton növekvő, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ és $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

(ii): Vegyük észre, hogy P nem abszolút folytonos a λ Lebesgue-mértékre nézve, mert a P-hez tartozó F eloszlásfüggvény nem folytonos (F nem folytonos c-ben).

Legyen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ekkor

$$\begin{aligned}
P(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x)\,\mathsf{d}F(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}\cap(-\infty,c)} \mathbb{1}_A(x)\,\mathsf{d}F(x) + \int_{\mathbb{R}\cap\{c\}} \mathbb{1}_A(x)\,\mathsf{d}F(x) + \int_{\mathbb{R}\cap(c,+\infty)} \mathbb{1}_A(x)\,\mathsf{d}F(x) \\
&= \int_{A\cap(-\infty,c)} f_1(x)\,\mathsf{d}\lambda(x) + (F_2(c) - F_1(c))\delta_c(A) + \int_{A\cap(c,+\infty)} f_2(x)\,\mathsf{d}\lambda(x).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$(F_2(c) - F_1(c))\delta_c(A) = (F_2(c) - F_1(c)) \int_{A\cap\{c\}} 1 \,\mathsf{d}\delta_c(x),$$

és

$$\int_{A\cap(-\infty,c)} 1 \,\mathsf{d}\delta_c(x) = 0, \qquad \int_{A\cap(c,+\infty)} 1 \,\mathsf{d}\delta_c(x) = 0, \qquad \int_{A\cap\{c\}} 1 \,\mathsf{d}\lambda(x) = 0,$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{A\cap(-\infty,c)} f_1(x) \,\mathsf{d}(\lambda+\delta_c)(x) + (F_2(c) - F_1(c)) \int_{A\cap\{c\}} 1 \,\mathsf{d}(\lambda+\delta_c)(x) \\ &\quad + \int_{A\cap(c,+\infty)} f_2(x) \,\mathsf{d}(\lambda+\delta_c)(x) \\ &= \int_A \Big(f_1(x)\mathbb{1}_{(-\infty,c)}(x) + (F_2(c) - F_1(c))\mathbb{1}_{\{c\}}(x) + f_2(x)\mathbb{1}_{(c,+\infty)}(x) \Big) \,\mathsf{d}(\lambda+\delta_c)(x). \end{aligned}$$

Ezért P abszolút folytonos $(\lambda+\delta_c)$-re nézve és a Radon–Nikodym derivált

$$\frac{\mathsf{d}P}{\mathsf{d}(\lambda+\delta_c)}(x) = f_1(x)\mathbb{1}_{(-\infty,c)}(x) + (F_2(c) - F_1(c))\mathbb{1}_{\{c\}}(x) + f_2(x)\mathbb{1}_{(c,+\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

1.1.22. Feladat. Legyenek ξ és η valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn és tegyük fel, hogy véges a második momentumuk. Az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis? A hamisakra adjunk ellenpéldát!

(a) $\mathbb{E}(\xi+\eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$.

(b) Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi+\eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$.

(c) $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$.

(d) Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$.

(e) Ha $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$, akkor ξ és η függetlenek.

(f) $\mathbb{D}^2(\xi+\eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$.

(g) Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{D}^2(\xi+\eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$.

(h) Ha $\mathbb{D}^2(\xi+\eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$, akkor ξ és η függetlenek.

Megoldás. (a): Igaz.

(b): Igaz (függetlenség nélkül is).

(c): Nem igaz. Ellenpélda: legyen $P(\xi = 1) = p$ és $P(\xi = 0) = 1 - p$, ahol $0 < p < 1$, és $\eta := 1 - \xi$. Ekkor $\xi\eta = \xi(1 - \xi) = 0$, így $\mathbb{E}(\xi\eta) = 0$, és $\mathbb{E}\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$, $\mathbb{E}\eta = 1 - \mathbb{E}\xi = 1 - p$. Ezért $\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = p(1 - p) \neq 0$. Tehát $\mathbb{E}(\xi\eta) \neq \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$.

(d): Igaz.

(e): Nem igaz. Ellenpéldánk a következő. Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása a következő kontingencia táblázattal megadva:

$\xi \ \backslash \ \eta$	-1	0	1	
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,5
1	0	0,25	0	0,25
	0,25	0,5	0,25	1

Ekkor

$$\begin{aligned} P(\xi = -1) &= \frac{1}{4} = P(\eta = -1), \\ P(\xi = 0) &= \frac{1}{2} = P(\eta = 0), \\ P(\xi = 1) &= \frac{1}{4} = P(\eta = 1), \end{aligned}$$

és $P(\xi\eta = 0) = 1$. Ezért $\mathbb{E}(\xi\eta) = 0$ és

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= (-1)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0, \\ \mathbb{E}\eta &= (-1)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

Így $\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = 0 = \mathbb{E}\xi\eta$. Azonban, ξ és η nem függetlenek, hiszen például $P(\xi = 0, \eta = 0) = 0$, de

$$P(\xi = 0)P(\eta = 0) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

(f): Nem igaz. Ellenpéldánk a következő: legyen ξ egy olyan valószínűségi változó, melyre $\mathbb{D}^2\xi \neq 0$ és $\eta := \xi$. Ekkor $\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2(2\xi) = 4\mathbb{D}^2\xi$, de $\mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta = 2\mathbb{D}^2\xi$.

(g): Igaz.

(h): Nem igaz. Ellenpélda: az (e)-beli ellenpélda most is megfelelő. Valóban,

$$\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 = (-1)^2\frac{1}{4} + 0^2\frac{1}{2} + 1^2\frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

és $\mathbb{D}^2\eta = 1/2$. Továbbá,

$$\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}(\xi\eta) + \mathbb{E}\eta^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ezért $\mathbb{D}^2(\xi + \eta) = \mathbb{D}^2\xi + \mathbb{D}^2\eta$. Azonban ξ és η nem függetlenek. $\square$

1.1.23. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 3.3.1.) Legyen X egy valószínűségi változó. Igaz-e általában, hogy
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}X}?$$
Van-e olyan X valószínűségi változó, melyre teljesül az előző egyenlőség?

Megoldás. Általában nem igaz, hogy $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}X}$. Például, ha $X-1$ eloszlása p-paraméterű Bernoulli, ahol $0 < p < 1$, úgy
$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= 2p + 1(1-p) = 1 + p,\\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{1}{2}p + \frac{1}{1}(1-p) = 1 - \frac{p}{2}.\end{aligned}$$

Megadható viszont olyan X valószínűségi változó, melyre teljesül a megkívánt egyenlőség. Ha például, $P(X = a) = 1$, ahol $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, úgy $\mathbb{E}X = a$, $\mathbb{E}(1/X) = 1/a$, és így teljesül az egyenlőség. Adunk egy másik példát is.

Ha például X eloszlása olyan, hogy
$$P(X=-1) = \frac{1}{9}, \qquad P(X = 1/2) = \frac{4}{9}, \qquad P(X = 2) = \frac{4}{9},$$
úgy
$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= (-1)\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\frac{4}{9} + 2\frac{4}{9} = 1,\\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) &= (-1)\frac{1}{9} + 2\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\frac{4}{9} = 1.\end{aligned}$$

Így teljesül az egyenlőség. □

1.1.24. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 3.11.27.) Legyenek X_n, $n \geqslant 1$, független, azonos eloszlású, egész értékű valószínűségi változók. Legyen $S_0 := 0$, $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Minden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esetén jelölje R_n az $S_0, S_1, \ldots, S_n$ sorozat által felvett különböző (egész) értékek számát. Mutassuk meg, hogy
$$P(R_n = R_{n-1} + 1) = P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0), \quad n \in \mathbb{N},$$
és
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}R_n = P(S_k \neq 0,\ \forall\, k \geqslant 1).$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy $R_0 = 1$. Legyen a továbbiakban $n \in \mathbb{N}$. Ekkor
$$\begin{aligned}P(R_n = R_{n-1}+1) &= P(S_n \neq S_{n-1}, S_n \neq S_{n-2}, \ldots, S_n \neq S_0)\\ &= P(X_n \neq 0, X_n + X_{n-1} \neq 0, \ldots, X_n + \cdots + X_2 \neq 0, X_n + \cdots + X_1 \neq 0).\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1)$ eloszlása megegyezik $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eloszlásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(R_n = R_{n-1}+1) &= P(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \ldots, X_1 + \cdots + X_{n-1} \neq 0, X_1 + \cdots + X_n \neq 0) \\ &= P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0, S_n \neq 0) = P(S_1 S_2 \cdots S_{n-1} S_n \neq 0). \end{aligned}$$

Így minden $n \geqslant 1$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R_n &= \int_\Omega R_n(\omega)\,\mathsf{d}P(\omega) \\ &= \int_{\{\omega\in\Omega\,:\,R_n(\omega)=R_{n-1}(\omega)+1\}} R_n(\omega)\,\mathsf{d}P(\omega) + \int_{\{\omega\in\Omega\,:\,R_n(\omega)=R_{n-1}(\omega)\}} R_n(\omega)\,\mathsf{d}P(\omega) \\ &= \int_{\{\omega\in\Omega\,:\,R_n(\omega)=R_{n-1}(\omega)+1\}} (R_{n-1}(\omega)+1)\,\mathsf{d}P(\omega) + \int_{\{\omega\in\Omega\,:\,R_n(\omega)=R_{n-1}(\omega)\}} R_{n-1}(\omega)\,\mathsf{d}P(\omega) \\ &= \int_\Omega R_{n-1}(\omega)\,\mathsf{d}P(\omega) + \int_{\{\omega\in\Omega\,:\,R_n(\omega)=R_{n-1}(\omega)+1\}} 1\,\mathsf{d}P(\omega) \\ &= \mathbb{E}R_{n-1} + P(R_n = R_{n-1}+1) = \mathbb{E}R_{n-1} + P(S_1 S_2 \cdots S_{n-1} S_n \neq 0). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{E}R_n &= \mathbb{E}R_{n-1} + P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0) = \mathbb{E}R_{n-2} + P(S_1 \cdots S_{n-1} \neq 0) + P(S_1 \cdots S_n \neq 0) \\ &= \cdots = \mathbb{E}R_0 + P(S_1 \neq 0) + P(S_1 S_2 \neq 0) + \cdots + P(S_1 \cdots S_n \neq 0) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^n P(S_1 \cdots S_m \neq 0), \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{\mathbb{E}R_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^n P(S_1 \cdots S_m \neq 0), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.5}$$

Itt $P(S_1 \cdots S_m \neq 0)$, $m \in \mathbb{N}$, monoton csökkenő sorozat, hiszen $\{S_1 \cdots S_m \neq 0\} \subseteq \{S_1 \cdots S_{m-1} \neq 0\}$, $m \geqslant 1$. Felhasználva, hogy a szóbanforgó sorozat alulról korlátos is (pl. 0-val), kapjuk, hogy konvergens. Karakterizálnunk kell még a határértékét.

Felhasználva, hogy

$$\bigcap_{m=1}^\infty \{S_1 \cdots S_m \neq 0\} = \{S_k \neq 0,\ \forall\, k \geqslant 1\},$$

a valószínűség folytonossága alapján adódik, hogy

$$\lim_{m\to\infty} P(S_1 \cdots S_m \neq 0) = P\left(\bigcap_{m=1}^\infty \{S_1 \cdots S_m \neq 0\}\right) = P(S_k \neq 0,\ \forall\, k \geqslant 1).$$

Felhasználva, azt, hogy ha x_n, $n \in \mathbb{N}$, valós számok olyan sorozata, hogy $x_n \to a \in \mathbb{R}$, úgy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \to a,$$

kapjuk, hogy
$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P(S_1\cdots S_m \neq 0) \to P(S_k \neq 0,\ \forall\, k \geqslant 1).$$
Így (1.1.5) alapján kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}R_n}{n} = P(S_k \neq 0,\ \forall\, k \geqslant 1)$. □

1.1.25. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 3.4.1.) Tekintsünk egy olyan érmét, mellyel a fejdobás valószínűsége p, az írásdobásé pedig $1-p$, ahol $p \in (0,1)$. Feldobjuk ezt az érmét n alkalommal. Szériának nevezzük dobásoknak egy olyan sorozatát, mely azonos kimenetelekből áll. Például, ha $n = 7$ és a $FFIFIIF$ dobássorozat adódott, úgy a szériák száma 5. Jelölje a továbbiakban R_n az n dobásból a szériák számát. Határozzuk meg R_n várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás. Minden $j = 1,\dots,n-1$ esetén legyen I_j annak az eseménynek az indikátorfüggvénye, hogy a j-edik és a $(j+1)$-edik dobás kimenetele különböző. Azaz
$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{ha a } j\text{-edik és a } (j+1)\text{-edik dobás } FI \text{ vagy } IF,\\ 0 & \text{ha a } j\text{-edik és a } (j+1)\text{-edik dobás } FF \text{ vagy } II. \end{cases}$$
Ekkor teljes indukcióval kapjuk, hogy
$$R_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} I_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Így
$$\mathbb{E}R_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\mathbb{E}I_j = 1 + (n-1)2p(1-p), \quad n \in \mathbb{N}.$$
Figyelembe véve R_n korábbi előállítását, számoljuk ki először $\mathbb{E}(R_n-1)^2$-et:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_n-1)^2 &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n-1} I_j\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n-1} I_j^2 + 2\sum_{j<k,\ j,k=1,\dots,n-1} I_jI_k\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\mathbb{E}I_j + 2\sum_{j<k,\ j,k=1,\dots,n-1}\mathbb{E}(I_jI_k).\end{aligned}$$
Felhasználva, hogy $|j-k| > 1,\ j,k = 1,\dots,n-1,$ esetén I_j és I_k függetlenek (és így ez esetben $\mathbb{E}(I_jI_k) = \mathbb{E}I_j\mathbb{E}I_k = (\mathbb{E}I_1)^2$), kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_n-1)^2 &= (n-1)\mathbb{E}I_1 + 2\Big(\mathbb{E}(I_1I_2) + \mathbb{E}(I_2I_3) + \cdots + \mathbb{E}(I_{n-2}I_{n-1})\Big)\\ &\quad + \big((n-1)^2 - (n-1) - 2(n-2)\big)(\mathbb{E}I_1)^2\\ &= (n-1)\mathbb{E}I_1 + 2(n-2)\mathbb{E}(I_1I_2) + \big((n-1)^2 - 3n + 5\big)(\mathbb{E}I_1)^2\\ &= (n-1)2p(1-p) + 2(n-2)(p^2(1-p) + (1-p)^2p)\\ &\quad + \big((n-1)^2 - 3n + 5\big)(2p(1-p))^2.\end{aligned}$$

Mivel $p^2(1-p)+(1-p)^2p = p(1-p)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2 R_n &= \mathbb{D}^2(R_n-1) = \mathbb{E}(R_n-1)^2 - (\mathbb{E}(R_n-1))^2\\ &= (n-1)2p(1-p) + 2(n-2)p(1-p) + \big((n-1)^2-3n+5\big)4p^2(1-p)^2\\ &\quad -(n-1)^2 4p^2(1-p)^2\\ &= (4n-6)p(1-p) - (3n-5)4p^2(1-p)^2 = 2p(1-p)\Big(2n-3-2(3n-5)p(1-p)\Big).\end{aligned}$$

□

1.1.26. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 5.6.5.) Legyen X egy valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$ akkor és csak akkor, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden olyan A eseményre, melyre $P(A) < \delta(\varepsilon)$.

Megoldás. Tegyük fel először, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) < \varepsilon$ minden olyan A eseményre, melyre $P(A) < \delta(\varepsilon)$. Legyen a továbbiakban $\varepsilon > 0$ rögzített. Felhasználva, hogy

$$0 \leqslant \limsup_{x\to\infty} P(|X| > x) \leqslant \limsup_{x\to\infty} P(|X| \geqslant x) = 1 - \lim_{x\to\infty} F_{|X|}(x) = 0,$$

kapjuk, hogy $\lim_{x\to\infty} P(|X| > x) = 0$, és így létezik olyan $x > 0$, hogy $P(|X| > x) < \delta(\varepsilon)$. Ekkor $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>x\}}) < \varepsilon$. Továbbá, felhasználva, hogy

$$|X| = |X|\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant x\}} + |X|\mathbb{1}_{\{|X|>x\}} \quad \text{és} \quad \mathbb{E}\Big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant x\}}\Big) \leqslant x,$$

egy előadáson tanult tétel alapján kapjuk, hogy $\mathbb{E}|X|$ létezik és

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}\Big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant x\}}\Big) + \mathbb{E}\Big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>x\}}\Big) \leqslant x + \varepsilon < +\infty.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$. Ekkor a dominált konvergencia tétel alapján

$$\lim_{y\to\infty} \mathbb{E}\Big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>y\}}\Big) = 0.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor létezik olyan $y > 0$, hogy $\mathbb{E}\Big(|X|\mathbb{1}_{\{|X|>y\}}\Big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $B := \{|X| > y\}$. Felhasználva, hogy tetszőleges A eseményre

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A\cap B^c} + \mathbb{1}_{A\cap B} \leqslant \mathbb{1}_{A\cap B^c} + \mathbb{1}_B,$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) \leqslant \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{A\cap B^c}) + \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_B) \leqslant \mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_{A\cap B^c}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $B^c = \{|X| \leqslant y\}$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) \leqslant yP(A\cap B^c) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant yP(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $\delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2y}$. Ekkor $\mathbb{E}(|X|\mathbb{1}_A) < \varepsilon$, ha $P(A) < \delta(\varepsilon)$. □

1.2. Konvolúció

1.2.1. Feladat. Mutassuk meg, hogy k db független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege k-adrendű, λ paraméterű gamma eloszlású.

Megoldás. Jelölje $\Gamma(k,\lambda)$ a k-adrendű, λ paraméterű gamma eloszlást. Ekkor

$$f_{\Gamma(k,\lambda)}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Teljes indukcióval mutatjuk meg az állítást. Jelölje a továbbiakban minden $k \in \mathbb{N}$ esetén f_k k db független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvényét. Ha $k = 1$, akkor

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

így $k = 1$ esetén igaz az állítás. Tegyük most fel, hogy $1, \ldots, k$ esetén igaz az összefüggés. Megmutatjuk, hogy igaz $k + 1$-re is. A konvolúciós képlet alapján számolva, ha $y > 0$, akkor

$$\begin{aligned} f_{k+1}(y) &= \int_0^y f_k(x) f_1(y-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^y \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda(y-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \int_0^y x^{k-1} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} e^{-\lambda y} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^y = \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \frac{y^k e^{-\lambda y}}{k} = \frac{\lambda^{k+1} y^k e^{-\lambda y}}{k!}. \end{aligned}$$

Ha pedig $y \leqslant 0$, úgy $f_{k+1}(y) = 0$. Így $k + 1$-re is igaz az összefüggés. □

1.2.2. Feladat. Mutassunk példát két korrelálatlan, abszolút folytonos ξ és η valószínűségi változóra, melyek nem függetlenek.

Megoldás. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $[-1/2, 1/2]$ intervallumon. Belátjuk, hogy ξ és $\eta := \xi^2$ korrelálatlanok, de nem függetlenek. Ekkor

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\xi = \frac{-1/2 + 1/2}{2} = 0, \qquad \mathbb{D}^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{(1/2 - (-1/2))^2}{12} = \frac{1}{12}, \\ &\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{12}, \qquad \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi^3 = \int_{-1/2}^{1/2} x^3\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Így

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta = 0 - 0 \cdot \frac{1}{12} = 0,$$

azaz ξ és η korrelálatlanok.

Informális indoklása annak, hogy ξ és η nem függetlenek az, hogy η determinisztikus függvénye ξ-nek, és η nem konstans.

Az alábbiakban egy formális indoklását adjuk annak, hogy ξ és η nem függetlenek. Legyen $a \in (0, 1/4)$. Ekkor

$$\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) < a^2\} = \{\omega \in \Omega : \xi^2(\omega) < a^2\} = \{\omega \in \Omega : |\xi(\omega)| < a\},$$

és ezért

$$P(\xi < a, \eta < a^2) = P(\xi < a, |\xi| < a) = P(|\xi| < a) = P(\eta < a^2).$$

Ez alapján

$$P(\xi < a, \eta < a^2) \neq P(\xi < a)P(\eta < a^2),$$

hiszen, ha egyenlőség állna fenn, akkor vagy $P(\eta < a^2) = 0$ vagy $P(\xi < a) = 1$ teljesülne, de a választása miatt egyik sem teljesülhet, így ξ és η nem függetlenek. □

1.2.3. Feladat. Legyen ξ $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $\xi + \xi^2$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Megjegyezzük, hogy a független valószínűségi változók összegére vonatkozó konvolúciós képletet most nem használhatjuk, mert ξ és ξ^2 nem függetlenek (ennek pontos indoklása az előző feladat szerint történhetne).

Jelölje $G : \mathbb{R} \to [0, 1]$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, azaz

$$G(x) := P\big(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) + \xi^2(\omega) < x\}\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ezt akarjuk felírni az $F : \mathbb{R} \to [0, 1], F(x) = P(\xi < x), x \in \mathbb{R}$ eloszlásfüggvény segítségével. Ez adhatja az ötletet, hogy a $\{\xi + \xi^2 < x\}$ halmazt írjuk fel olyan alakban, hogy csak a ξ valószínűségi változóra vonatkozó nívóhalmazokkal kifejezhető legyen. Esetünkben az derül ki, hogy

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) + \xi^2(\omega) < x\} = \{\omega \in \Omega : y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}$$

alkalmas $y_1(x)$ és $y_2(x)$ függvényekkel. Leírjuk azon $y \in \mathbb{R}$-ek halmazát, melyekre rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén $y + y^2 < x$ teljesül. Elég csak az $x > 0$ esettel foglalkozni, mert $x \leqslant 0$ esetén $P(\xi + \xi^2 < x) = 0$, hiszen $P(\xi \geqslant 0) = 1$. Legyen tehát $x > 0$. Mivel az $y + y^2 = x$ egyenlet két különböző valós megoldása:

$$y_1(x) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}, \qquad y_2(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2},$$

azt kapjuk, hogy

$$y + y^2 < x \quad \Longleftrightarrow \quad y_1(x) < x < y_2(x).$$

Így, mivel ξ abszolút folytonos kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(x) &= P(\{\omega \in \Omega : y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}) = F_\xi(y_2(x)) - F_\xi(y_1(x)) = F_\xi(y_2(x)) \\ &= 1 - e^{-1 \cdot y_2(x)} = 1 - \exp\left\{\frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}\right\}, \qquad x > 0, \end{aligned}$$

hiszen $F_\xi(y_1(x)) = 0$, mert $y_1(x) < 0$ és $P(\xi \geqslant 0) = 1$. Tehát

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

és így $\xi + \xi^2$ sűrűségfüggvénye

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \exp\left\{\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

□

1.2.4. Feladat. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, hogy ξ Poisson eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel és η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy $\xi + \eta$-nak is van sűrűségfüggvénye, és határozzuk is meg azt!

Megoldás. Legyen $[a, b]$ egy olyan intervallum, melyre $[a, b] \subseteq [n, n+1[$ valamely $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Ekkor

$$P(\xi + \eta \in [a, b]) = P(\xi = n, \eta \in [a - n, b - n]),$$

ugyanis, ha például $\xi = n - 1$, akkor $a \geqslant n$ miatt $\eta \geqslant 1$ kell, de ennek a valószínűsége 0. Felhasználva, hogy ξ és η függetlenek kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\xi + \eta \in [a, b]) &= P(\xi = n) P(\eta \in [a - n, b - n]) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} (b - n - (a - n)) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} (b - a) = \int_a^b f(x) \, \mathsf{d}x, \end{aligned}$$

ahol

$$f(x) := \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad x \in [n, n+1[, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Tehát

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \mathbb{1}_{[n, n+1[}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvény. Nyilván f nemnegatív, és Borel-mérhető is, mert $[n, n + 1[$, $n \in \mathbb{N}$ Borel-mérhető halmazok, és mérhető függvények pontonkénti határértéke is mérhető függvény. Az is teljesül, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathsf{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1.$$

A fenti számolások és $P(\xi + \eta \leqslant 0) = 0$ miatt

$$P(\xi + \eta < y) = \int_{-\infty}^{y} f(x) \, \mathsf{d}x, \quad y \in \mathbb{R},$$

azaz f $\xi+\eta$ sűrűségfüggvénye.

Megjegyezzük, hogy általában is igaz az, hogy ha ξ és η közül az egyik abszolút folytonos eloszlású, akkor $\xi+\eta$ is abszolút folytonos eloszlású (lásd pl. Rényi [9], 181. old). $\square$

1.2.5. Feladat. Legyenek ξ, η és ζ független valószínűségi változók, hogy ξ Poisson eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, η és ζ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy $\xi+\eta+\zeta$ abszolút folytonos eloszlású és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

Első megoldás. Jelen esetben $\eta+\zeta$ abszolút folytonos eloszlású és meghatározzuk most a sűrűségfüggvényét. A 3.3.5. Feladat alapján, ha X és Y független, a $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, úgy

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{ha} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Így

$$F_{\eta+\zeta}(x) = P(\eta+\zeta < x) = P\left(\left(\eta-\frac{1}{2}\right)+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right) < x-1\right) = F_{X+Y}(x-1), \quad x \in \mathbb{R},$$

és ezért

$$f_{\eta+\zeta}(x) = f_{X+Y}(x-1) = \begin{cases} 1-|x-1| & \text{ha} \quad |x-1| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |x-1| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1-|x-1| & \text{ha} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $[a,b]$ egy olyan intervallum, melyre $[a,b] \subset [n, n+1[$ valamely $n=1,2,\dots$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} &P\big(\xi+\eta+\zeta \in [a,b]\big) \\ &\quad = P\big(\xi = n-1, \eta+\zeta \in [a-n+1, b-n+1]\big) + P\big(\xi = n, \eta+\zeta \in [a-n, b-n]\big) \\ &\quad = P(\xi = n-1)P\big(\eta+\zeta \in [a-n+1, b-n+1]\big) + P(\xi = n)P\big(\eta+\zeta \in [a-n, b-n]\big) \\ &\quad = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\int_{a-n+1}^{b-n+1} f_{\eta+\zeta}(x)\,\mathsf{d}x + \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\int_{a-n}^{b-n} f_{\eta+\zeta}(x)\,\mathsf{d}x. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} &P\big(\xi+\eta+\zeta \in [a,b]\big) \\ &\quad = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\int_{a-n+1}^{b-n+1}(-x+2)\,\mathsf{d}x + \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\int_{a-n}^{b-n} x\,\mathsf{d}x \\ &\quad = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{a-n+1}^{b-n+1} + \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a-n}^{b-n} \\ &\quad = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{2}(b-n+1)^2+\frac{1}{2}(a-n+1)^2+2(b-n+1)-2(a-n+1)\right) \\ &\qquad + \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{1}{2}\big((b-n)^2-(a-n)^2\big) \\ &\quad = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\left(-\frac{b^2-a^2}{2}+(n+1)(b-a)\right) + \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\left(\frac{b^2-a^2}{2}-n(b-a)\right). \end{aligned}$$

Felírva a fenti összegben szereplő két tagot integrál alakban kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\big(\xi+\eta+\zeta\in[a,b]\big) &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\int_a^b(-x+n+1)\,\mathsf{d}x+\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\int_a^b(x-n)\,\mathsf{d}x \\ &= \int_a^b\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\Big(-x+n+1+\frac{\lambda}{n}(x-n)\Big)\,\mathsf{d}x. \end{aligned}$$

Így

$$f(x)=\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\Big(-x+n+1+\frac{\lambda}{n}(x-n)\Big),\qquad \text{ha }\ x\in[n,n+1[,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Ha $[a,b]\subset[0,1[$, úgy

$$\begin{aligned} P\big(\xi+\eta+\zeta\in[a,b]\big) &= P(\xi=0,\eta+\zeta\in[a,b])=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}P(\eta+\zeta\in[a,b]) \\ &= e^{-\lambda}\int_a^b x\,\mathsf{d}x=e^{-\lambda}\frac{b^2-a^2}{2}. \end{aligned}$$

Ezért

$$f(x)=e^{-\lambda}x,\quad \text{ha }\ x\in[0,1[,\qquad \text{és}\qquad f(x)=0,\quad \text{ha }\ x<0.$$

Második megoldás. Az 1.2.4. Feladat alapján $\xi+\eta$ abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi+\eta}(x)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\qquad \text{ha }\ x\in[n,n+1[,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

és $f_{\xi+\eta}(x)=0$, ha $x<0$. Mivel $\xi+\eta$ és ζ függetlenek kapjuk, hogy

$$f_{\xi+\eta+\zeta}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi+\eta}(y)f_\zeta(x-y)\,\mathsf{d}y,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Ha $x\leqslant0$, úgy egyszerűen adódik, hogy $f_{\xi+\eta+\zeta}(x)=0$.

Ha $0<x<1$, úgy

$$f_{\xi+\eta+\zeta}(x)=\int_0^x f_{\xi+\eta}(y)\,\mathsf{d}y=\int_0^x\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}\,\mathsf{d}y=xe^{-\lambda}.$$

Ha $x\geqslant1$, úgy legyen $n\in\mathbb{N}$ olyan, hogy $n\leqslant x<n+1$. Ekkor

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta+\zeta}(x) &= \int_{x-1}^x f_{\xi+\eta}(y)\,\mathsf{d}y=\int_{x-1}^n\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\,\mathsf{d}y+\int_n^x\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\,\mathsf{d}y \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}(n-x+1)+\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}(x-n) \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}\Big(n-x+1+\frac{\lambda}{n}(x-n)\Big). \end{aligned}$$

□

1.3. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség, Borel-Cantelli lemma

1.3.1. Feladat. (Shiryaev [11], 45. old.) Legyenek ξ és η olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, és $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{D}^2\eta = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) \leqslant 1 + \sqrt{1-\rho^2},$$

ahol $\rho := \operatorname{corr}(\xi, \eta)$.

Megoldás. Felhasználva, hogy

$$\max(\xi^2, \eta^2) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + |\xi^2 - \eta^2|),$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}\eta^2 + \mathbb{E}|\xi^2 - \eta^2|) = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}|\xi^2 - \eta^2|.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi^2 - \eta^2| &= \mathbb{E}|(\xi-\eta)(\xi+\eta)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(\xi-\eta)^2\mathbb{E}(\xi+\eta)^2} \\
&= \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2)\mathbb{E}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2)} = 2\sqrt{(1-\mathbb{E}\xi\eta)(1+\mathbb{E}\xi\eta)} \\
&= 2\sqrt{1-(\mathbb{E}\xi\eta)^2} = 2\sqrt{1-\rho^2}.
\end{aligned}$$

És így

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}|\xi^2 - \eta^2| \leqslant 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

□

1.3.2. Feladat. (A Csebisev-egyenlőtlenség kétdimenziós analógja, Shiryaev [11], 55. old.) Legyenek ξ és η valószínűségi változók, és legyen $\rho := \operatorname{corr}(\xi, \eta)$. Mutassuk meg, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\big\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon\mathbb{D}\xi\big\} \cup \big\{|\eta - \mathbb{E}\eta| \geqslant \varepsilon\mathbb{D}\eta\big\}\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(1 + \sqrt{1-\rho^2}).$$

Megoldás. Legyenek

$$\zeta_1 := \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\mathbb{D}\xi}, \qquad \zeta_2 := \frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\mathbb{D}\eta}.$$

Ekkor $\mathbb{E}\zeta_1 = \mathbb{E}\zeta_2 = 0$, $\mathbb{D}^2\zeta_1 = \mathbb{D}^2\zeta_2 = 1$ és $\operatorname{corr}(\zeta_1, \zeta_2) = \operatorname{corr}(\xi, \eta) = \rho$, valamint

$$P\Big(\big\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant \varepsilon\mathbb{D}\xi\big\} \cup \big\{|\eta - \mathbb{E}\eta| \geqslant \varepsilon\mathbb{D}\eta\big\}\Big) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\zeta_1^2 \geqslant \varepsilon^2\} \cup \{\zeta_2^2 \geqslant \varepsilon^2\}}.$$

Felhasználva, hogy

$$\mathbb{1}_{\{\zeta_1^2 \geqslant \varepsilon^2\} \cup \{\zeta_2^2 \geqslant \varepsilon^2\}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\max\{\zeta_1^2, \zeta_2^2\},$$

az előző feladat alapján kapjuk, hogy

$$P\Big(\big\{|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant\varepsilon\mathbb{D}\xi\big\}\cup\big\{|\eta-\mathbb{E}\eta|\geqslant\varepsilon\mathbb{D}\eta\big\}\Big)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}(1+\sqrt{1-\rho^2}).$$

Abban az esetben, ha ξ és η függetlenek, akkor $\rho=0$, és ekkor a becslés

$$P\Big(\big\{|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant\varepsilon\mathbb{D}\xi\big\}\cup\big\{|\eta-\mathbb{E}\eta|\geqslant\varepsilon\mathbb{D}\eta\big\}\Big)\leqslant\frac{2}{\varepsilon^2}.$$

Ez rögtön következik abból, hogy $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$, felhasználva az („1-dimenziós") Csebisev-egyenlőtlenséget.

Ha $\xi=\eta$, akkor $\rho=1$, így visszakapjuk az eredeti Csebisev-egyenlőtlenséget. □

1.3.3. Feladat. (A normális fluktuációk igazi nagyságrendjének megsejtése) Legyenek X_n, $n\in\mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek várható értéke $\mathbb{E}X_1=0$, szórásnégyzete $\mathbb{D}^2X_1=\sigma^2<+\infty$. Legyen $S_n:=\sum_{i=1}^n X_i$, $n\in\mathbb{N}$. A nagy számok gyenge törvénye azt mondja ki, hogy bármilyen rögzített $\varepsilon>0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{|S_n|}{n}>\varepsilon\right)=0.$$

Bizonyítsuk be a következő (erősebb) állítást: bármilyen $+\infty$-hez tartó $\{b_n,n\in\mathbb{N}\}$ pozitív számokból álló sorozatra, minden rögzített $\varepsilon>0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{|S_n|}{b_n\sqrt{n}}>\varepsilon\right)=0.$$

Megoldás. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint bármilyen $\varepsilon>0$ esetén

$$P\left(\frac{|S_n|}{b_n\sqrt{n}}>\varepsilon\right)=P(|S_n-\mathbb{E}S_n|>\varepsilon b_n\sqrt{n})\leqslant\frac{\mathbb{D}^2S_n}{\varepsilon^2b_n^2n}=\frac{n\mathbb{D}^2X_1}{\varepsilon^2b_n^2n}=\frac{\mathbb{D}^2X_1}{\varepsilon^2b_n^2}\to 0\quad\text{ha}\quad n\to+\infty.$$

□

1.3.4. Feladat. (Tóth Bálint feladata) (a): Bizonyítsuk be, hogy *a Markov-egyenlőtlenség éles a következő értelemben:* rögzítve az $0<m\leqslant\lambda$ számokat, létezik olyan nemnegatív X valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbb{E}X=m$ és $P(X\geqslant\lambda)=m/\lambda$, azaz a „Markov-egyenlőtlenség telítődik".

(b): Bizonyítsuk be, hogy *a Markov-egyenlőtlenség nem éles a következő értelemben:* rögzített nemnegatív X valószínűségi változóra, melynek várható értéke véges és nem nulla, fennáll, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda P(X\geqslant\lambda)}{\mathbb{E}X}=0.$$

Megoldás. (a): Ha $m>0$ és $m=\lambda$, akkor legyen X a konstans m valószínűségi változó, azaz $P(X=m)=1$. Így $\mathbb{E}X=m$ és $P(X\geqslant\lambda)=1$.

Ha $0 < m < \lambda$, akkor $0 < m/\lambda < 1$, és legyen X az a valószínűségi változó, melynek két értéke van 0 és λ, a következő valószínűségekkel:

$$P(X = \lambda) = \frac{m}{\lambda}, \qquad\qquad P(X = 0) = 1 - \frac{m}{\lambda}.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}X = \lambda\frac{m}{\lambda} + 0\left(1 - \frac{m}{\lambda}\right) = m,$$

valamint $P(X \geqslant \lambda) = P(X = \lambda) = m/\lambda$, azaz mindkét feltétel teljesül.

(b): Megjegyezzük, hogy a Markov-egyenlőtlenség alapján csak annyi következik, hogy

$$\frac{\lambda P(X \geqslant \lambda)}{\mathbb{E}X} \leqslant 1.$$

A bizonyítandó állítás azzal ekvivalens, hogy $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$. Ekkor

$$\lambda P(X \geqslant \lambda) = \lambda\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\}}\right) = \mathbb{E}\left(\lambda\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\}}\right).$$

Felhasználva, hogy $\mathbb{E}X < +\infty$, és azt, hogy minden $\omega \in \Omega$ esetén

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mathbb{1}_{\{X(\omega)\geqslant\lambda\}} = 0, \quad \text{és} \quad \lambda\mathbb{1}_{\{X(\omega)\geqslant\lambda\}} \leqslant X(\omega)\mathbb{1}_{\{X(\omega)\geqslant\lambda\}} \leqslant X(\omega),$$

hiszen X nemnegatív, a dominált konvergencia tétel alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}\left(\lambda\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\}}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mathbb{1}_{\{X\geqslant\lambda\}}\right) = \mathbb{E}0 = 0.$$

És így $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$.

Megjegyezzük, hogy ha feltesszük azt is, hogy $\mathbb{E}X^2 < +\infty$, akkor gyorsabban is célba érhetünk. Hiszen a Csebisev-egyenlőtlenség alapján, ha $\lambda > \mathbb{E}X$, úgy

$$\begin{aligned}\lambda P(X \geqslant \lambda) = \lambda P(X - \mathbb{E}X \geqslant \lambda - \mathbb{E}X) &\leqslant \lambda P(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \lambda - \mathbb{E}X) \\ &\leqslant \lambda\frac{\mathbb{D}^2X}{(\lambda - \mathbb{E}X)^2}.\end{aligned}$$

Itt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\frac{\mathbb{D}^2X}{(\lambda - \mathbb{E}X)^2} = 0,$$

így $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$.

□

1.3.5. Feladat. (Monte–Carlo-integrálás) Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mérhető, négyzetesen integrálható függvény (a Lebesgue-mérték szerint). Legyen továbbá

$$I := \int_0^1 f(x)\,\mathsf{d}x, \qquad\qquad J := \int_0^1 f(x)^2\,\mathsf{d}x.$$

Legyenek U_n, $n \in \mathbb{N}$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók és

$$I_n := \frac{f(U_1) + f(U_2) + \cdots + f(U_n)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Mutassuk meg, hogy $I_n \xrightarrow{st} I$.

(b) Legyen $a > 0$ rögzített. Igaz-e, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P\left(|I_n - I| \geqslant \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{J - I^2}{a^2}?$$

Megoldás. (a): Mivel $f(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$ is független, azonos eloszlásúak és $\mathbb{E}|f(U_1)| = \int_0^1 |f(x)| \, \mathsf{d}x < +\infty$, a nagy számok erős törvénye alapján kapjuk, hogy

$$I_n = \frac{f(U_1) + f(U_2) + \cdots + f(U_n)}{n} \longrightarrow \int_0^1 f(x) \, \mathsf{d}x = I \quad \text{P-m.m.}$$

Valóban fennáll, hogy $\mathbb{E}|f(U_1)| < +\infty$, ugyanis a Ljapunov-egyenlőtlenség szerint (lásd 2.1.14. Feladat)

$$\mathbb{E}|f(U_1)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}f^2(U_1)} = \sqrt{J} < +\infty.$$

Mivel a P-majdnem mindenütti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, megkapjuk a bizonyítandó állítást.

(b): Legyen $a > 0$ rögzített. Mivel $\mathbb{E}I_n = \mathbb{E}f(U_1) = I$, a Csebisev-egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$P\left(|I_n - I| \geqslant \frac{a}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}^2 I_n}{a^2/n} = \frac{n}{a^2}\frac{1}{n^2} n\mathbb{D}^2 f(U_1) = \frac{1}{a^2}\big(\mathbb{E}f(U_1)^2 - (\mathbb{E}f(U_1))^2\big) = \frac{1}{a^2}(J - I^2).$$

Így IGAZ a dolog. □

1.3.6. Feladat. Egy kaszinóban azt játsszák, hogy egymás után feldobnak egy szabályos pénzdarabot. Végtelen sok ember egymást felváltva bemegy a kaszinóba, és ott megfigyel bizonyos számú pénzfeldobást, mégpedig az n-edik ember k_n-et, $n \in \mathbb{N}$. Akinek a kaszinóban való ott-tartózkodása alatt csupa fej dobás történt, az nyer, akinek ott-tartózkodása alatt történt írás dobás is, az veszít. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $k_n = [\log_2 n]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel végtelen sok ember távozik nyertesen;

(b) ha $k_n = \left[\frac{101}{100}\log_2 n\right]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen;

(c) ha $k_n = [\log_2 n + \log_2 \log_2 n]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel végtelen sok ember távozik nyertesen;

(d) ha $k_n = \left[\log_2 n + \frac{101}{100}\log_2 \log_2 n\right]$, $n \geqslant 2$, akkor 1 valószínűséggel csak véges sok ember távozik nyertesen.

Megoldás. Legyen

$$A_n := \big\{\text{az } n\text{-edik ember nyertesen távozik}\big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor $P(A_n) = P(k_n$ darab dobás mindegyike fej$) = \frac{1}{2^{k_n}}$, $n \in \mathbb{N}$. A Borel-Cantelli lemma szerint egyrészt, ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, akkor

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\big(\text{végtelen sok bekövetkezik az } \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ események közül}\big) = 0.$$

Másrészt, mivel az A_n, $n \in \mathbb{N}$, események függetlenek, ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, akkor

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\big(\text{végtelen sok bekövetkezik az } \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ események közül}\big) = 1.$$

(a): Az $[x] \leqslant x$, $x \in \mathbb{R}$, egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{[\log_2 n]}} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\log_2 n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(b): Az $[x] > x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\left[\frac{101}{100}\log_2 n\right]}} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{101}{100}\log_2 n - 1}} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{101}{100}} < \infty.$$

(c): Az $[x] \leqslant x$, $x \in \mathbb{R}$, egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{[\log_2 n + \log_2 \log_2 n]}} \geqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\log_2 n + \log_2 \log_2 n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n}.$$

Tekintsük az $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x \log_2 x}$ monoton csökkenő függvényt. Ekkor az előbbi összeg az f függvény egy felső integrálközelítő összege, így

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n} \geqslant \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log_2 x} \,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{2^y y} 2^y \ln 2 \,\mathrm{d}y = \ln 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \infty.$$

Így $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

(d): Az $[x] > x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\left[\log_2 n + \frac{101}{100}\log_2 \log_2 n\right]}} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\log_2 n + \frac{101}{100}\log_2 \log_2 n - 1}}$$
$$= 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^{\frac{101}{100}}}.$$

Tekintsük az $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(\log_2 x)^{\frac{101}{100}}}$ monoton csökkenő függvényt. Ekkor az előbbi összeg (2-es szorzó nélkül és az összegzést $n = 3$-tól futtatva) az f függvény egy alsó integrálközelítő összege, így

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^{\frac{101}{100}}} \leqslant \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log_2 x)^{\frac{101}{100}}} \,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{2^y y^{\frac{101}{100}}} 2^y \ln 2 \,\mathrm{d}y = \ln 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{\frac{101}{100}}} \,\mathrm{d}y$$
$$= \ln 2 \left[\frac{y^{1-\frac{101}{100}}}{1 - \frac{101}{100}}\right]_1^{\infty} = \ln 2 \left[-100 y^{-\frac{1}{100}}\right]_1^{\infty} = 100 \ln 2 < +\infty.$$

Így $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$. □

1.3.7. Feladat. Mutassunk példát olyan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre és ebben olyan A_n, $n \in \mathbb{N}$, eseményekre, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ és

(a) annak a valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be $\frac{1}{2}$.

(b) annak a valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be 0.

(Azaz a Borel-Cantelli-lemma „második" felében, mikor is teljesül a $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ reláció, a függetlenség feltétele nem hagyható el.)

Megoldás. Legyen $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0,1])$ és P a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en.
(a): Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $A_n := [0, 1/2]$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty, \qquad \text{és} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = [0, 1/2].$$

Ezért $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1/2$. (Az A_n, $n \in \mathbb{N}$, események természetesen nem függetlenek.)
(b): Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $A_n := (0, 1/n]$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

és megmutatjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (0, 1/k] = \emptyset. \tag{1.3.6}$$

Valóban, indirekt módon tegyük fel, hogy $x \in [0,1]$ olyan, hogy $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n_0 \geqslant n$ és $x \in (0, 1/n_0]$. Abban az esetben, ha $x > 0$, létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{N} < x$, így bármilyen $M \geqslant N$ esetén $\frac{1}{M} \leqslant \frac{1}{N} < x$, és ezért $x \notin (0, \frac{1}{M}]$, azaz ellentmondásra jutottunk. Ezért $\limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \{0\}$. Az is látható, hogy $0 \notin \limsup_{n\to\infty} A_n$. Így kapjuk (1.3.6)-t. Ezért $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. (Az A_n, $n \in \mathbb{N}$, események természetesen nem függetlenek.) $\square$

2. Valószínűségszámítás 2. feladatok

2.1. Valószínűségi változók eloszlása, várható értéke

2.1.1. Feladat. Legyenek $A_i, i \in I$, és B olyan részhalmazai $\Omega \neq \emptyset$-nak, hogy $B \notin \bigcup_{i\in I} A_i$. Igaz-e, hogy ekkor $B \notin \sigma(A_i, i \in I)$?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Ellenpéldát adunk. Legyen $\Omega := [0,1]$, B egy zárt halmaz $[0,1]$-ben, A_i, $i \in I$, pedig a $[0,1]$-beli nyílt intervallumok rendszere. □

2.1.2. Feladat. Legyenek X és Y valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn és tegyük fel, hogy $\sigma(X) = \sigma(Y)$. Igaz-e, hogy ekkor $P(X = Y) = 1$?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* Ellenpéldát adunk. Legyen $Y := X + 1$. Ekkor mivel X determinisztikus függvénye Y-nak és fordítva is kapjuk, hogy $\sigma(X) = \sigma(Y)$. Azonban $P(X = Y) = P(X = X + 1) = 0$. □

2.1.3. Megjegyzés. (**Lebesgue-mérték, Lebesgue–Stieltjes-mérték**) Jelölje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebráját, azaz az $\mathbb{R}$ nyílt halmazai által generált σ-algebrát. Ez megegyezik az $\mathbb{R}$ nyílt intervallumai által generált σ-algebrával. Ennek igazolásánál (és később is) fontos a következő struktúra tétel (Kolmogorv–Fomin [5], 2.2.6. Tétel): $\mathbb{R}$ minden nyílt halmazát előállíthatjuk véges vagy megszámlálhatóan végtelenül sok páronként diszjunkt nyílt intervallum uniójaként. (A $(-\infty, +\infty)$, $(\alpha, +\infty)$ és $(-\infty, \beta)$ alakú halmazokat is az intervallumok közé soroljuk.) Ekkor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ egy mérhető tér.

Hogyan származtatjuk ezen a Lebesgue-mértéket? Egy $[a, b[$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, intervallum hossza $\mu([a, b[) = b - a$. A Carathéodory-tétel segítségével belátható, hogy μ egyértelműen terjeszthető ki $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-re egy $\overline{\mu}$ mértékké. Ezt a $\overline{\mu}$ mértéket nevezzük Lebesgue-mértéknek. Ekkor $\overline{\mu}$ nem véges, de σ-véges mérték.

Carathéodory-tétel: Legyen μ egy nemnegatív, σ-additív, σ-véges halmazfüggvény az $\mathcal{A}$ algebrán. Ekkor egyértelműen létezik egy $\overline{\mu}$ mérték a $\sigma(\mathcal{A})$ generált σ-algebrán, melyre $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$. (A σ-végesség az egyértelműséghez kell.)

A Carathéodory-tétel általánosabb verziója segítségével az is belátható, hogy $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazainak σ-algebráján is egyértelműen definiálható olyan mérték, mely szerint egy $[a, b[$ intervallum mértéke $b-a$. (Az egyértelműségnél a σ-végességnek van szerepe.) S tulajdonképpen ezt a mértéket szokás Lebesgue-mértéknek hívni. Azt tudjuk, hogy minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető. Nem érdektelen kérdés, hogy ez a konstrukció vajon a maximális kiterjesztést adja-e, vagyis a Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrája a lehető legbővebb olyan σ-algebra-e, amire a kiterjesztést el tudjuk végezni. A válasz nemleges. A nemmérhető halmazok tárgyalásakor megmutatható, hogy a Lebesgue-mérték mértékként kiterjeszthető a Lebesgue-mérhető halmazoknál bővebb σ-algebrára is. Az is belátható, hogy ez a kiterjesztés már nem egyértelmű. Sőt az is belátható, hogy az $\mathbb{R}$ összes részhalmazaiból álló σ-algebrára, $2^{\mathbb{R}}$-re nem végezhető úgy el e kiterjesztés, hogy $[a, b[$ mértéke $b - a$ legyen. Hasznos olvasmány e tekintetben Járai Antal ,,Invariant extension of Haar measure" című cikke (Járai [3]).

A Lebesgue–Stieltjes-mérték a Lebesgue-mérték általánosítása. Ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekvő, balról folytonos függvény, akkor egyértelműen létezik $\mathbb{R}$ Borel halmazain, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-en olyan lokálisan véges μ_F mérték, hogy minden $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $\mu_F([a, b[) = F(b) - F(a)$. Megfordítva, ha μ_F egy lokálisan véges mérték, akkor mindig előállítható a megadott módon. (Egy mérték lokálisan végessége azt jelenti, hogy minden kompakt halmaz mértéke véges.) Ekkor μ_F neve az F-hez rendelt Lebesgue–Stieltjes-mérték, a μ_F szerinti integrálás pedig a Lebesgue–Stieltjes integrálás. □

2.1.4. Feladat. Legyenek $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy ekkor $P_\xi = P_\eta$ akkor és csak akkor, ha $F_\xi = F_\eta$. (Azaz az eloszlás és az eloszlásfüggvény kölcsönösen egyértelműen meghatározza egymást.)

Megoldás. (Shiryaev [11], 152-154. old. alapján) Először felidézzük az eloszlás és az eloszlásfüggvény fogalmát: ξ eloszlása a $P_\xi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$, $P_\xi(B) := P(\xi^{-1}(B))$ halmazfüggvény, mely valószínűségi mérték $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$-n, illetve ξ eloszlásfüggvénye az $F_\xi : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := P(\xi < x) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k), \qquad x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k,$$

függvény.

Tegyük fel először, hogy $P_\xi = P_\eta$. Legyen $B := (-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}^k$, ekkor $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ és

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P_\xi(B) = P_\eta(B) = P_\eta((-\infty, x)) = P(\eta \in (-\infty, x)) = P(\eta < x) = F_\eta(x).$$

Így $F_\xi = F_\eta$.

Tegyük most fel, hogy $F_\xi(x) = F_\eta(x)$, $x \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$P_\xi((-\infty, x)) = P(\xi < x) = P(\eta < x) = P_\eta((-\infty, x)), \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Azaz a P_ξ és P_η $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$-n értelmezett valószínűségi mértékek megegyeznek a $\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}^k\}$ halmazrendszeren. A Carathéodory tételt felhasználva megmutatjuk, hogy megegyeznek $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$-n is.

Carathéodory-tétel: Legyen Ω egy nemüres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló halmazalgebra. Legyen $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ egy σ-véges mérték. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ mérték, mely μ_0 kiterjesztése, azaz $\mu(A) = \mu_0(A)$, $A \in \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A}$ halmazalgebrát a következőképpen definiáljuk:

$$A \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} :\, A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

ahol minden $i = 1, \ldots, n$ esetén

$$A_i \in \Big\{\emptyset, (-\infty, a), [b, c), [d, +\infty) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\Big\} \tag{2.1.7}$$

és $A_1, \ldots, A_n$ páronként diszjunktak. (Azaz $\mathcal{A}$ $\mathbb{R}$ azon részhalmazaiból álló halmazalgebra, mely részhalmazok véges sok, diszjunkt intervallum uniójaként állnak elő.) Megmutatható, hogy $\mathcal{A}$ valóban halmazalgebra. Definiáljuk a $P_0^\xi : \mathcal{A} \to [0,1]$, $P_0^\eta : \mathcal{A} \to [0,1]$ függvényeket, hogy

$$P_0^\xi(A) := P_\xi(A) = \sum_{k=1}^n F_\xi(b_k) - F_\xi(a_k), \quad A = \bigcup_{k=1}^n I_{a_k,b_k} \in \mathcal{A},$$
$$P_0^\eta(A) := P_\eta(A) = \sum_{k=1}^n F_\eta(b_k) - F_\eta(a_k), \quad A = \bigcup_{k=1}^n I_{a_k,b_k} \in \mathcal{A},$$

ahol $F_\xi(+\infty) = F_\eta(+\infty) := 1$, $F_\xi(-\infty) = F_\eta(-\infty) := 0$ és I_{a_k,b_k} (2.1.7)-típusú, a_k és b_k végpontú intervallum. Nyilvánvalóan, P_0^ξ és P_0^η végesen additív halmazfüggvények $\mathcal{A}$-n, $P_0^\xi(\emptyset) = P_0^\eta(\emptyset) = 0$, $P_0^\xi(\mathbb{R}) = P_0^\eta(\mathbb{R}) = 1$, és $P_0^\xi(A) = P_0^\eta(A)$, $A \in \mathcal{A}$. Megmutatjuk, hogy P_0^ξ és P_0^η σ-additív halmazfüggvények $\mathcal{A}$-n, és így azt is kapjuk majd, hogy P_0^ξ és P_0^η σ-véges mértékek $\mathcal{A}$-n. Ismert, hogy ehhez elég azt megmutatni, hogy P_0^ξ, illetve P_0^η felülről folytonos az üreshalmazon. A továbbiakban csak P_0^ξ-vel foglalkozunk, P_0^η esete hasonló.

Megmutatjuk tehát, hogy ha $A_n \downarrow \emptyset$, $A_n \in \mathcal{A}$, akkor $P_0^\xi(A_n) \downarrow 0$. Legyen a továbbiakban $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathcal{A}$-beli sorozat, hogy $A_n \downarrow \emptyset$. Tegyük fel először, hogy létezik olyan $N \in \mathbb{R}$, hogy $A_n \subset [-N, N]$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists$ $B_n \in \mathcal{A} :$ $\overline{B_n} \subseteq A_n$ és

$$P_0^\xi(A_n) - P_0^\xi(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

(Itt $\overline{B_n}$ a B_n halmaz lezártját jelöli.) Valóban, minden $a, b \in \mathbb{R}$, $b_n \uparrow b$ szigorúan monoton növekvő és $c_n \uparrow +\infty$ sorozatok esetén, F_ξ balról folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$P_0^\xi([a, b_n)) = F_\xi(b_n) - F_\xi(a) \to F_\xi(b) - F_\xi(a) = P_0^\xi([a, b))$$
$$P_0^\xi((-\infty, b_n)) = F_\xi(b_n) - 0 \to F_\xi(b) - 0 = P_0^\xi((-\infty, b))$$
$$P_0^\xi([b, c_n)) = F_\xi(c_n) - F_\xi(b) \to 1 - F_\xi(b) = P_0^\xi([b, +\infty)).$$

(A b_n, $n \in \mathbb{N}$, sorozatot azért kell szigorúan monoton növekvőnek választani, mert ha $b_n = b$, $n \in \mathbb{N}$ lenne, akkor $\overline{[a, b_n)} \not\subseteq [a, b)$ állna fenn.) Felhasználva $\mathcal{A}$ definícióját kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

A feltételek miatt $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$, és így $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{B_n} = \emptyset$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \overline{B_n} = \emptyset. \tag{2.1.8}$$

Valóban, mivel $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \emptyset$, $\overline{B_n} \subset A_n \subset [-N, N]$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$[-N, N] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big([-N, N] \setminus \overline{B_n}\big),$$

így $\{[-N, N] \setminus \overline{B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ nyílt lefedése a $[-N, N]$ kompakt halmaznak. Ezért a Heine-Borel tétel szerint létezik véges részlefedés, azaz létezik olyan $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$\bigcup_{n=1}^{n_0} \big([-N, N] \setminus \overline{B_n}\big) = [-N, N],$$

és így $\bigcap_{n=1}^{n_0} \overline{B_n} = \emptyset$. Mivel $A_n \downarrow \emptyset$, $A_{n_0} \subseteq A_{n_0-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1$, (2.1.8) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_0^{\xi}(A_{n_0}) &= P_0^{\xi}\Big(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\Big) + P_0^{\xi}\Big(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\Big) = P_0^{\xi}\Big(A_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} B_k\Big) \\ &= P_0^{\xi}\Big(\bigcup_{k=1}^{n_0}(A_{n_0} \setminus B_k)\Big) \leqslant P_0^{\xi}\Big(\bigcup_{k=1}^{n_0}(A_k \setminus B_k)\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} P_0^{\xi}(A_k \setminus B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^k} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Legyen most $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat, hogy $A_n \downarrow \emptyset$ és $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor létezik olyan $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $P_0^{\xi}([-N, N]) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Felhasználva az

$$A_n = \big(A_n \cap [-N, N]\big) \cup \big(A_n \cap (\mathbb{R} \setminus [-N, N])\big)$$

felbontást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_0^{\xi}(A_n) &= P_0^{\xi}(A_n \cap [-N, N]) + P_0^{\xi}\,(A_n \cap (\mathbb{R} \setminus [-N, N])) \\ &\leqslant P_0^{\xi}(A_n \cap [-N, N]) + P_0^{\xi}\,(\mathbb{R} \setminus [-N, N]) \leqslant P_0^{\xi}(A_n \cap [-N, N]) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Az előző gondolatmenethez hasonlóan, mivel $A_n \cap [-N, N] \subset [-N, N]$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy létezik olyan $n_0 := n_0(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$, hogy

$$P_0^{\xi}(A_n \cap [-N, N]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha } n \geqslant n_0.$$

Így figyelembevéve az előző becslést, kapjuk, hogy $P_0^{\xi}(A_n) \leqslant \varepsilon$, ha $n \geqslant n_0$.

Ezért P_0^{ξ} és P_0^{η} σ-véges, egymással megegyező mértékek $\mathcal{A}$-n. Így a Carathéodory-tétel szerint egyértelműen terjeszthetők ki mértékké $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-re. Mivel

$$P_{\xi}([a, b)) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a), \quad a < b, \;\; a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

és mivel P_{ξ} valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en, a Carathéodory-tétel miatt azt is kapjuk, hogy az előző egyértelmű kiterjesztés megegyezik P_{ξ}-vel. Hasonlóan, az előző egyértelmű kiterjesztés megegyezik P_{η}-val is. Így $P_{\xi} = P_{\eta}$. □

Az előző feladat tulajdonképpen azt mondja, hogy az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en értelmezett valószínűségi mértékek és az $\mathbb{R}$-en értelmezett eloszlásfüggvények között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik.

2.1.5. Feladat. Hogyan illeszkednek a most megtanult várható érték fogalomba a diszkrét, ill. abszolút folytonos esetre (Valószínűségszámítás 1-ben) megtanult várható érték fogalmak?

Megoldás. Először felidézzük, hogy mit tanultunk diszkrét, ill. abszolút folytonos esetben.

Diszkrét eset: Azt mondjuk, hogy a $p_k = P(\xi = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ eloszlású ξ valószínűségi változónak létezik a várható értéke, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k$ sor abszolút konvergens. Ekkor az

$$\mathbb{E}\xi := \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k$$

számot nevezzük a ξ várható értékének. (Az abszolút konvergencia biztosítja, hogy a várható érték az x_k-k sorszámozásától független szám.)

Abszolút folytonos eset: Legyen a ξ valószínűségi változó abszolút folytonos, sűrűségfüggvénye f. Ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \, \mathsf{d}x$ véges, akkor azt mondjuk, hogy ξ-nek létezik véges várható értéke. Ekkor az

$$\mathbb{E}\xi := \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, \mathsf{d}x$$

számot ξ várható értékének nevezzük.

Hogyan állnak ezek egymással összhangban? Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy eloszlásfüggvény, és jelölje λ_F az F-hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mértéket $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en. Azaz λ_F az az egyértelműen meghatározott mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en, melyre $\lambda_F([a, b)) = F(b) - F(a)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó, akkor eloszlása, P_ξ egy valószínűségi mérték $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en, melyre

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = P(\xi^{-1}(B)) = (P \circ \xi^{-1})(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

azaz $P_\xi = P \circ \xi^{-1}$. Ha speciálisan $B = [a, b)$, akkor

$$P_\xi([a, b)) = P(\xi \in [a, b)) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \lambda_F([a, b)),$$

és így λ_F egyértelműsége maitt $P_\xi = \lambda_F$.

Ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathsf{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, és

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \int_B f_\xi(t) \, \mathsf{d}t, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Így ha $\lambda(B) = 0$, akkor $P_\xi(B) = 0$. (Itt λ az 1-dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli.)

Látjuk, hogy λ és $\lambda_F = P_\xi$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-en értelmezett mértékek, és P_ξ abszolút folytonos λ-ra nézve. Jelölésben: $P_\xi \ll \lambda$ és $f_\xi = \frac{\mathsf{d}P_\xi}{\mathsf{d}\lambda}$ a Radon–Nikodym derivált.

A most megtanult várható érték fogalom szerint, ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ nemnegatív valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\,\mathsf{d}P(\omega) = \int_\mathbb{R} x\,\mathsf{d}P_\xi(x) = \int_\mathbb{R} x\ \mathsf{d}\lambda_F(x) =: \int_\mathbb{R} x\ \mathsf{d}F(x),$$

ahol az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ és $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\xi)$ mértékterek között az $\omega := \xi^{-1}(x)$ helyettesítést hajtottuk végre.

A fenti (majdnem) általános alakból látszik, hogy ha ξ abszolút folytonos, akkor mivel $f_\xi = \frac{\mathsf{d}P_\xi}{\mathsf{d}\lambda}$, azt kapjuk, hogy

$$\int_\mathbb{R} x\ \mathsf{d}P_\xi(x) = \int_\mathbb{R} x f_\xi(x)\ \mathsf{d}x = \mathbb{E}\xi.$$

Abban az esetben, ha ξ diszkrét eloszlású és eloszlása $P(\xi = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ akkor

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{\{i\,:\,x_i < x\}} p_i, \qquad x \in \mathbb{R},$$

és így $\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^\infty x_i p_i$.

Mi annak az oka, hogy a diszkrét eloszlás és a sűrűségfüggvény között van szoros kapcsolat? A sűrűségfüggvény nem más, mint az abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásának Radon–Nikodym deriváltja a Lebesgue-mértékre nézve. A diszkrét eloszlás pedig nem más, mint a diszkrét valószínűségi változó eloszlásának a számláló mértékre vonatkozó Radon–Nikodym deriváltja. Ez az oka, hogy a diszkrét eloszlás a sűrűségfüggvénnyel mutat analógiát és nem az eloszlásfüggvénnyel. A hasonlóság felfedezhető az alábbiakban is:

$$\begin{aligned} p_i \geqslant 0, \quad i \in \mathbb{N} \quad &\longleftrightarrow \quad f(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \sum_{i=1}^\infty p_i = 1 \quad &\longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathsf{d}x = 1, \\ \mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^\infty x_i p_i \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\ \mathsf{d}x. \end{aligned}$$

□

2.1.6. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha ξ és η független, véges várható értékű valószínűségi változók, akkor $\xi\eta$ is véges várható értékű, és $\mathbb{E}(\xi\eta) = (\mathbb{E}\xi)(\mathbb{E}\eta)$.

2.1.7. Feladat. Bizonyítandó, hogy a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$\varphi_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_{\xi_1}(t_1) \cdots \varphi_{\xi_n}(t_n), \qquad \forall\ t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R},$$

ahol $\varphi_{\xi_1,\ldots,\xi_n}$ és $\varphi_{\xi_{t_k}}$ a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó, illetve a ξ_k valószínűségi változó karakterisztikus függvényét jelöli.

2.1.8. Feladat. Legyen I egy nemüres halmaz. Legyen minden $i \in I$ esetén $(E_i, \mathcal{B}_i)$ egy mérhető tér, és $X_i : \Omega \to E_i$ egy valószínűségi változó. Bizonyítandó, hogy az $\{X_i : i \in I\}$ valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha az I különböző elemeiből álló minden $(i_1, \dots, i_n)$ véges részhalmaz és tetszőleges $f_{i_1} : E_{i_1} \to \mathbb{R}, \dots, f_{i_n} : E_{i_n} \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvények esetén teljesül, hogy

$$\mathbb{E}\Big(f_{i_1}(X_{i_1}) \cdots f_{i_n}(X_{i_n})\Big) = \mathbb{E}f_{i_1}(X_{i_1}) \cdots \mathbb{E}f_{i_n}(X_{i_n}).$$

Megoldás. Először a visszafele irányt bizonyítjuk. Legyen $(i_1, \dots, i_n)$ az I különböző elemeiből álló tetszőleges részhalmaz. Legyen $f_{i_j}(x) := \mathbb{1}_{A_{i_j}}(x)$, $x \in E_{i_j}$, ahol $A_{i_j} \in \mathcal{B}_{i_j}$ tetszőlegesen rögzített, $j = 1, \dots, n$. Ekkor f_{i_j} korlátos és mérhető is, mert $A_{i_j} \in \mathcal{B}_{i_j}$. A feltevésből adódóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{A_{i_1}}(X_{i_1}) \cdots \mathbb{1}_{A_{i_n}}(X_{i_n})\Big] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{i_1}}(X_{i_1})] \cdots \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{i_n}}(X_{i_n})].$$

Mivel

$$\mathbb{1}_{A_{i_1}}(X_{i_1}(\omega)) \cdots \mathbb{1}_{A_{i_n}}(X_{i_n}(\omega)) = \mathbb{1}_{\{X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_n} \in A_{i_n}\}}(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

kapjuk, hogy

$$P(X_{i_1} \in A_{i_1}, \dots, X_{i_n} \in A_{i_n}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdots P(X_{i_n} \in A_{i_n}).$$

Az $\{X_i : i \in I\}$ valószínűségi változók függetlensége pedig azt jelenti, hogy az I különböző elemeiből álló minden $(i_1, \dots, i_n)$ véges részhalmaz esetén

$$P(C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n}) = P(C_{i_1}) \cdots P(C_{i_n}),$$

ahol minden $j = 1, \dots, n$ esetén

$$C_{i_j} \in \sigma(X_{i_j}) = \{X_{i_j}^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_{i_j}\} = \big\{\{X_{i_j} \in A\} : A \in \mathcal{B}_{i_j}\big\}.$$

Látjuk, hogy a fentiekben pontosan az $\{X_i : i \in I\}$ valószínűségi változók függetlenségét láttuk be.

Rátérünk az odafele irány bizonyítására. Elegendő azt belátni, hogy a feltételekből következik, hogy az $f_{i_1}(X_{i_1}), \dots, f_{i_n}(X_{i_n})$ valószínűségi változók függetlenek és létezik és véges a várható értékük. Mivel $f_{i_1}, \dots, f_{i_n}$ korlátos, mérhető függvények, a fenti várható értékek léteznek és végesek. Azt kell még megmutatni, hogy $f_{i_1}(X_{i_1}), \dots, f_{i_n}(X_{i_n})$ függetlenek. A feltevés miatt az $X_{i_1}, \dots X_{i_n}$ valószínűségi változók függetlenek, ez azt jelenti, hogy a $\sigma(X_{i_1}), \dots, \sigma(X_{i_n})$ σ-algebrák függetlenek. Ezért tetszőleges $D_k \in \sigma(X_{i_k})$, $k = 1, \dots, n$ események esetén

$$P(D_1 \cap \dots \cap D_n) = P(D_1) \cdots P(D_n).$$

Az $f_{i_1}(X_{i_1}), \dots, f_{i_n}(X_{i_n})$ valószínűségi változók függetlensége azt jelenti, hogy minden $E_k \in \sigma(f_{i_k}(X_{i_k}))$, $k = 1, \dots, n$ esetén

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdots P(E_n).$$

Nyilván elég azt belátni, hogy $\sigma(f(X)) \subset \sigma(X)$. Mivel f mérhető, így minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel halmaz esetén $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(E)$. Így tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$(f \circ X)^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : (f \circ X)(\omega) \in \mathcal{B}\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(B)\} = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{A},$$

hiszen X valószínűségi változó és $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(E)$. (Itt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a háttérben levő valószínűségi mezőt jelöli.) Ezért

$$\sigma(f(X)) = \big\{(f \circ X)^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big\} = \big\{X^{-1}(f^{-1}(B)) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big\} \subseteq \sigma(X).$$

(A fentiekből az is látszik, hogy $f(X)$ tényleg valószínűségi változó.) □

2.1.9. Feladat. Bizonyítandó, hogy az $\{A_i : i \in I\}$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha az $\{\mathbb{1}_{A_i} : i \in I\}$ valószínűségi változók függetlenek.

Megoldás. Definíció szerint $\{A_i : i \in I\}$ függetlenek, ha az $\mathcal{F}_i := \{\emptyset, A_i, \Omega \setminus A_i, \Omega\}$ σ-algebrák függetlenek.

Definíció szerint $\{\mathbb{1}_{A_i} : i \in I\}$ függetlenek, ha az általuk generált $\{\sigma(\mathbb{1}_{A_i}) : i \in I\}$ σ-algebrák függetlenek.

Felhasználva, hogy tetszőleges ξ valószínűségi változó esetén $\sigma(\xi) = \{\xi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, kapjuk, hogy

$$\sigma(\mathbb{1}_{A_i}) = \{\emptyset, A_i, \Omega \setminus A_i, \Omega\}, \quad i \in I.$$

Azaz a két dolog ugyanazt jelenti, a definíciók feloldása után. □

2.1.10. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ és ξ valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy a következő halmaz esemény:

$$\big\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\big\}.$$

2.1.11. Feladat. (Jensen-egyenlőtlenség) Bizonyítandó, hogy ha ξ véges várható értékű valószínűségi változó és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvény, akkor $g(\mathbb{E}\xi) \leqslant \mathbb{E}g(\xi)$.

Megoldás. Az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény konvex (a, b)-n, ha bármilyen $x_1,\ x_2 \in (a, b)$ és bármilyen $p,\ q \in [0, 1]$, $p + q = 1$, esetén

$$f(px_1 + qx_2) \leqslant pf(x_1) + qf(x_2).$$

Ismert, hogy f akkor és csak akkor konvex, ha bármely pontjában van olyan egyenes, mely alatt nem megy a görbe. Ismert továbbá, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvény folytonos is. A fentiek alapján $g(\xi)$ tényleg valószínűségi változó, és mivel $\mathbb{E}\xi \in \mathbb{R}$, $g(\mathbb{E}\xi)$ értelmezhető és egy valós szám. A fentiek miatt g konvexségéből következik az is, hogy az $(\mathbb{E}\xi, g(\mathbb{E}\xi))$ ponthoz van olyan egyenes: $y = m(x - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi)$, melyre

$$g(x) \geqslant m(x - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Így $g \circ \xi \geqslant m(\xi - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi)$. Várható értéket véve mindkét oldalon kapjuk, hogy $\mathbb{E}g(\xi)$ létezik és $\mathbb{E}g(\xi) \in]-\infty, +\infty]$, valamint

$$\mathbb{E}g(\xi) = \mathbb{E}(g \circ \xi) \geqslant \mathbb{E}\big(m(\xi - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi)\big) = m\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi) = g(\mathbb{E}\xi).$$

A következőkben (a teljesség kedvéért) részletesen leírjuk annak indoklását, hogy $\mathbb{E}g(\xi)$ létezése hogyan következik. Ehhez azt kell igazolni, hogy $g(\xi)$ pozitív, illetve negatív részének várható értéke közül legalább az egyik véges. Megmutatjuk, hogy $g(\xi)$ negatív részének várható értéke véges, azaz $\mathbb{E}g(\xi)^- < +\infty$. Mivel $g(\xi) \geqslant m(\xi - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi)$ kapjuk, hogy

$$\min(g(\xi), 0) \geqslant \min\Big(m(\xi - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi), 0\Big),$$

és így $g(\xi)^- \leqslant \big(m(\xi - \mathbb{E}\xi) + g(\mathbb{E}\xi)\big)^-$. Mivel $\xi^+ + \xi^- = |\xi|$ és $\xi^+ \geqslant 0$, $\xi^- \geqslant 0$ kapjuk, hogy $\xi^- \leqslant |\xi|$, és így

$$g(\xi)^- \leqslant |m|(|\xi| + |\mathbb{E}\xi|) + |g(\mathbb{E}\xi)|.$$

Mivel ξ véges várható értékű valószínűségi változó, $\mathbb{E}\xi^+ < +\infty$, $\mathbb{E}\xi^- < +\infty$, és ezért $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$. Így

$$\mathbb{E}g(\xi)^- \leqslant 2|m|\mathbb{E}|\xi| + |g(\mathbb{E}\xi)| < +\infty.$$

Ebből a gondolatmenetből az is adódik, hogy $\mathbb{E}g(\xi) \in]-\infty, +\infty]$. □

2.1.12. Feladat. (Többdimenziós Jensen-egyenlőtlenség) Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nemüres, Borel-mérhető, konvex halmaz, $f : C \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $X : \Omega \to C$ olyan valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}\|X\| < +\infty$ és $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ is valószínűségi változó. Ekkor $\mathbb{E}X \in C$, az $\mathbb{E}f(X)$ várható érték létezik és $\mathbb{E}f(X) \in (-\infty, +\infty]$, továbbá $\mathbb{E}f(X) \geqslant f(\mathbb{E}X)$.

2.1.13. Feladat. Legyenek $\xi, \eta : \Omega \to (0, +\infty)$ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi < +\infty$, $\mathbb{E}\eta < +\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}\left(\xi + \eta + \frac{1}{\xi\eta}\right) \geqslant \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta + \frac{1}{\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta} \geqslant 3.$$

Megoldás. Alkalmazzuk a többdimenziós Jensen-egyenlőtlenséget a

$$C := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y > 0\Big\},$$

és $f : C \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x + y + \frac{1}{xy}, \qquad (x, y) \in C$$

választásokkal. Megmutatjuk, hogy f konvex függvény C-n. A C halmaz nyilván konvex. Mivel f kétszer differenciálható C-n, egy tétel alapján f akkor és csak akkor konvex C-n, ha $f''(x, y)$ pozitív szemidefinit minden $(x, y) \in C$ esetén. Mivel

$$f'(x, y) = \left(1 + \frac{1}{y}\frac{-1}{x^2}\ ,\ 1 + \frac{1}{x}\frac{-1}{y^2}\right),$$

kapjuk, hogy

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y}\frac{2}{x^3} & \frac{-1}{x^2}\frac{-1}{y^2} \\ \frac{-1}{y^2}\frac{-1}{x^2} & \frac{1}{x}\frac{2}{y^3} \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in C.$$

Így $(x,y) \in C$ esetén $(f''(x,y))_{11} = 2/(yx^3) > 0$ és

$$\det f''(x,y) = \frac{4}{x^4y^4} - \frac{1}{y^4x^4} = \frac{3}{x^4y^4} > 0.$$

Ezért $f''(x,y)$ pozitív definit, s így f szigorúan konvex C-n.

(Másként is okoskodhatunk f konvexségét illetően. Mivel

$$\ln\left(\frac{1}{xy}\right) = -\ln x - \ln y,$$

és $\ln x$ konkáv, kapjuk, hogy $\ln(1/(xy))$ konvex. Mivel

$$\frac{1}{xy} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{xy}\right)\right),$$

és exp konvex, monoton növekvő kapjuk, hogy $1/(xy)$ konvex. Mivel $x+y$ lineáris függvény, így konvex, és mivel két konvex függvény összege is konvex, kapjuk, hogy f konvex.)

Így kapjuk a feladat első felének állítását. (Megjegyezzük, hogy a feladat első felének belátásához tekinthettük volna az $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, $(x,y) \in C$ függvényt is.) A feladat második felének állítása abból következik, hogy a számtani és mértani közép közötti összefüggés miatt

$$x + y + \frac{1}{xy} \geqslant 3\sqrt[3]{xy\frac{1}{xy}} = 3 \cdot 1 = 3.$$

□

2.1.14. Feladat. (Ljapunov-egyenlőtlenség) Mutassuk meg, hogy ha $0 < s < t$, akkor

$$(\mathbb{E}|\xi|^s)^{1/s} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^t)^{1/t},$$

azaz az L^p-terek normái monoton növekvőek. (Ha $(X, \mathcal{X}, m)$ egy mértéktér, akkor $p > 0$ esetén

$$L^p(X,\mathcal{X},m) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ mérhető}, \int_X |f|^p \,\mathsf{d}m < +\infty \right\},$$

és $\|f\|_p := (\int |f|^p \,\mathsf{d}m)^{1/p}$.)

Megoldás. Emeljük a bizonyítandó egyenlőtlenséget a t-edik hatványra:

$$(\mathbb{E}|\xi|^s)^{t/s} \leqslant \mathbb{E}|\xi|^t.$$

Használjuk a 2.1.11. Feladatot a $g(x) = x^{t/s}$, $x \geqslant 0$, és $\eta := |\xi|^s$ választásokkal. Ekkor g konvex, mert

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{t}{s} x^{\frac{t}{s}-1}, \\ g''(x) &= \frac{t}{s}\left(\frac{t}{s}-1\right) x^{t/s-2} \geqslant 0, \quad \text{ha } x \geqslant 0. \end{aligned}$$

A 2.1.11. Feladat alapján,

$$(\mathbb{E}|\xi|^s)^{t/s} = g(\mathbb{E}\eta) \leqslant \mathbb{E}g(\eta) = \mathbb{E}|\xi|^t.$$

□

2.1.15. Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy a Ljapunov-egyenlőtlenség egy ismert egyenlőtlenség általánosításának tekinthető. Legyen ξ egy olyan valószínűségi változó, melyre

$$P(\xi = a_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

ahol $a_1 \geqslant 0, \dots, a_n \geqslant 0$. Ekkor

$$\mathbb{E}|\xi|^s = \sum_{k=1}^n a_k^s \frac{1}{n} = \frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n}.$$

Legyen $0 < s < t$, ekkor a Ljapunov-egyenlőtlenség szerint,

$$\left(\frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n}\right)^{1/s} = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{1/s} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^t)^{1/t} = \left(\frac{a_1^t + \dots + a_n^t}{n}\right)^{1/t}.$$

Ez pedig nem más, mint a hatványközepekre vonatkozó egyenlőtlenség. □

2.1.16. Feladat. (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség) Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$, $\mathbb{E}\eta^2 < +\infty$, akkor $\mathbb{E}|\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}$.

Megoldás. Ha $\mathbb{E}\eta^2 = 0$, akkor $P(\eta = 0) = 1$ és így $P(|\xi\eta| = 0) = 1$, $\mathbb{E}|\xi\eta| = 0$. Azaz, ha $\mathbb{E}\eta^2 = 0$, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül (mindkét oldal 0). Ha $\mathbb{E}\eta^2 > 0$, akkor minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\kappa_\lambda := (|\xi| + \lambda|\eta|)^2$. Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leqslant \mathbb{E}\kappa_\lambda = \mathbb{E}(\xi^2 + \lambda^2\eta^2 + 2\lambda|\xi||\eta|) = \lambda^2\mathbb{E}\eta^2 + 2\lambda\mathbb{E}|\xi\eta| + \mathbb{E}\xi^2.$$

Látható, hogy $\mathbb{E}\kappa_\lambda$ másodfokú függvénye λ-nak, mely másodfokú függvény nemnegatív. Így a diszkriminánsa kisebb vagy egyenlő, mint 0. Ezért

$$4(\mathbb{E}|\xi\eta|)^2 - 4\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2 \leqslant 0.$$

Átrendezés után kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. □

2.1.17. Feladat. (Hölder-egyenlőtlenség) Legyenek $p, q \in (1, +\infty)$, melyekre $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor, ha $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$ és $\mathbb{E}|\eta|^q < +\infty$, akkor

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leqslant \big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p}\big(\mathbb{E}|\eta|^q\big)^{1/q} = |\xi|_p|\eta|_q.$$

Megoldás. Felhasználjuk a megoldás során az alábbi lemmát, melyet be is bizonyítunk.

Lemma: Ha $0 \leqslant a, b < +\infty$, $1 < p < +\infty$, és $q = \frac{p}{p-1}$, akkor

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Bizonyítás. Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor triviálisan igaz az állítás. Legyen $x := a^p$, $y := b^q$. Ezekkel a jelölésekkel azt kell belátni, hogy

$$x^{1/p}y^{1/q} \leqslant \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y.$$

Ezzel ekvivalens, hogy (logaritmust véve)

$$\frac{1}{p}\log x + \frac{1}{q}\log y \leqslant \log\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right).$$

Mivel $1/p + 1/q = 1$ és $\log$ konkáv függvény, kapjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség teljesül.

Visszatérve a Hölder-egyenlőtlenség bizonyítására, abban az esetben, ha $|\xi|_p = 0$ vagy $|\eta|_q = 0$ az alábbiakból következik a Hölder-egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} |\xi|_p = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\xi| = 0 \quad \text{P-m.m.} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = 0 \quad \text{P-m.m.} \\ &\Rightarrow \quad |\xi\eta| = 0 \quad \text{P-m.m.} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}|\xi\eta| = 0. \end{aligned}$$

Tekintsük most az esetet, mikor $|\xi|_p > 0$ és $|\eta|_q > 0$. Legyen

$$h := \frac{\xi}{|\xi|_p}, \qquad k := \frac{\eta}{|\eta|_q}.$$

Alkalmazzuk az előbbi lemmát $|h|$-re és $|k|$-re, kapjuk, hogy

$$|h||k| \leqslant \frac{1}{p}|h|^p + \frac{1}{q}|k|^q.$$

Vegyük ezen egyenlőtlenség mindkét oldalának várható értékét:

$$\frac{1}{|\xi|_p|\eta|_q}\mathbb{E}|\xi\eta| = \mathbb{E}|h||k| \leqslant \frac{1}{p}\mathbb{E}|h|^p + \frac{1}{q}\mathbb{E}|k|^q = \frac{1}{p}\mathbb{E}\left(\frac{|\xi|^p}{\mathbb{E}|\xi|^p}\right) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left(\frac{|\eta|^q}{\mathbb{E}|\eta|^q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Átszorozva $|\xi|_p|\eta|_q$-el, kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. □

2.1.18. Feladat. (Minkowski-egyenlőtlenség) Ha $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$ és $\mathbb{E}|\eta|^p < +\infty$ valamely $p \in [1, +\infty)$ esetén, akkor

$$\Big(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\mathbb{E}|\xi|^p\Big)^{1/p} + \Big(\mathbb{E}|\eta|^p\Big)^{1/p}.$$

Megoldás. Ha $p = 1$, úgy azt kell belátni, hogy

$$\mathbb{E}|\xi + \eta| \leqslant \mathbb{E}|\xi| + \mathbb{E}|\eta|,$$

azon feltétel mellett, hogy $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$ és $\mathbb{E}|\eta| < +\infty$. Mivel $|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|$, mindkét oldal várható értékét véve kapjuk a dolgot.

Legyen a továbbiakban $1 < p < +\infty$. Először végiggondoljuk, hogy $\mathbb{E}|\xi + \eta|^p < +\infty$. Felhasználva, hogy

$$|\xi + \eta|^p \leqslant (|\xi| + |\eta|)^p \leqslant \Big(2\max(|\xi|, |\eta|)\Big)^p = 2^p \max(|\xi|^p, |\eta|^p) \leqslant 2^p(|\xi|^p + |\eta|^p),$$

várható értékét véve az előző egyenlőtlenség sorozat jobb- és baloldalának, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}|\xi + \eta|^p \leqslant 2^p(\mathbb{E}|\xi|^p + \mathbb{E}|\eta|^p) < +\infty.$$

Végezzük el az alábbi átalakítást

$$\mathbb{E}|\xi + \eta|^p = \mathbb{E}\Big(|\xi + \eta|^{p-1}|\xi + \eta|\Big) \leqslant \mathbb{E}\Big(|\xi + \eta|^{p-1}|\xi|\Big) + \mathbb{E}\Big(|\xi + \eta|^{p-1}|\eta|\Big). \tag{2.1.9}$$

A Hölder-egyenlőtlenséget akarjuk alkalmazni p és $q = \frac{p}{p-1}$ választásokkal (ekkor $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). A Hölder-egyenlőtlenség alkalmazható, mert $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$ és

$$\mathbb{E}\Big(|\xi + \eta|^{p-1}\Big)^q = \mathbb{E}|\xi + \eta|^p < +\infty.$$

Így

$$\mathbb{E}\Big(|\xi + \eta|^{p-1}|\xi|\Big) \leqslant \Big[\mathbb{E}\Big(|\xi + \eta|^{p-1}\Big)^q\Big]^{1/q} \Big[\mathbb{E}|\xi|^p\Big]^{1/p} = \Big(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big[\mathbb{E}|\xi|^p\Big]^{1/p}.$$

Hasonlóan,

$$\mathbb{E}\Big(|\xi + \eta|^{p-1}|\eta|\Big) \leqslant \Big(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big[\mathbb{E}|\eta|^p\Big]^{1/p}.$$

Ezért (2.1.9) alapján

$$\mathbb{E}|\xi + \eta|^p \leqslant \Big(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p} + \big(\mathbb{E}|\eta|^p\big)^{1/p}\Big).$$

Ha $\mathbb{E}|\xi + \eta|^p \neq 0$, úgy

$$\Big(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\Big)^{1 - \frac{p-1}{p}} \leqslant \big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p} + \big(\mathbb{E}|\eta|^p\big)^{1/p}.$$

Ha $\mathbb{E}|\xi + \eta|^p = 0$, úgy $P(|\xi + \eta| = 0) = 1$, és ekkor nyilván fennáll a bizonyítandó egyenlőtlenség.

$\square$

2.2. Konvergenciafajták

Ebben a részben a konvergenciafajtákkal foglalkozunk. Először felidézzük a definíciókat.

Legyen a továbbiakban $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, és ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, és ξ Ω-n értelmezett valószínűségi változók.

2.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *sorozat* **egyenletesen konvergál** *a* ξ *valószínűségi változóhoz, ha* $\forall\ \varepsilon > 0$ *esetén* $\exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\ n \geqslant N(\varepsilon)$ *esetén*

$$|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon, \qquad \forall\ \omega \in \Omega.$$

A definíciót ekvivalens módon úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$ *esetén* $\exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\ n \geqslant N(\varepsilon)$ *esetén*

$$\sup_{\omega \in \Omega} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| = \|\xi_n - \xi\|_\infty < \varepsilon,$$

azaz $\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \xi\|_\infty = 0$.

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *sorozat* **pontonként konvergál** *a* ξ *valószínűségi változóhoz, ha* $\forall\ \omega \in \Omega$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$. *(Részletesebben kiírva: ha* $\forall\ \omega \in \Omega$ *esetén* $\forall\ \varepsilon > 0$*-hoz* $\exists\ N(\varepsilon, \omega) \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\ n \geqslant N(\varepsilon, \omega)$ *esetén* $|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon$.*)*

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *sorozat* **P-majdnem mindenütt konvergál** *a* ξ *valószínűségi változóhoz, ha*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Jelölés: $\xi_n \to \xi$ *P-m.m. A P-majdnem mindenütti konvergenciát szokás 1-valószínűséggel való, vagy majdnem biztos konvergenciának is nevezni.*

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *sorozat* **sztochasztikusan konvergál** *a* ξ *valószínűségi változóhoz, ha* $\forall\ \varepsilon > 0$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Jelölés: $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$. *A sztochasztikus konvergencia helyett szokás azt is mondani, hogy mértékben/valószínűségben való konvergencia, és néha a* $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ *jelölést is használjuk.*

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *sorozat* **eloszlásban konvergál** *a* ξ *valószínűségi változóhoz, ha*

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$$

minden olyan $x \in \mathbb{R}$ *pontban, ahol* F_ξ *folytonos. Jelölés:* $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$. *Az eloszlásban való konvergencia helyett szokás azt is mondani, hogy gyenge konvergencia, és néha a* $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$, *ill.* $\xi_n \Longrightarrow \xi$ *jelöléseket is használjuk. (Az eloszlásban való konvergencia ekvivalens például azzal, hogy bármilyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *korlátos, folytonos függvényre* $\mathbb{E} f(\xi_n) \to \mathbb{E} f(\xi)$.*)*

Legyen $0 < p < +\infty$. *Azt mondjuk, hogy a* $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *sorozat* L_p**-ben konvergál** *a* ξ *valószínűségi változóhoz, ha* $\mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$ *és*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p = 0.$$

Jelölés: $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$.

2.2.2. Megjegyzés. (i): Megjegyezzük, hogy ha az L_p-beli konvergencia definíciójában nem tesszük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$, hanem csak azt, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p = 0$, akkor előfordulhat, hogy $\mathbb{E}|\xi_n|^p = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}|\xi| = +\infty$. Legyen ugyanis például ξ Cauchy eloszlású és $\xi_n := \xi$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii): Legyen $0 < p < +\infty$. Jelöljük L_p-vel azon ξ valószínűségi változók halmazát, melyekre $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$. Legyen továbbá

$$\|\xi\|_p := \Big(\mathbb{E}|\xi|^p\Big)^{1/p}, \qquad \xi \in L_p.$$

Ha $p \geqslant 1$, akkor $\|\xi\|_p$ norma L_p-n, és L_p teljes metrikus tér a megfelelő származtatott metrikával. Ha $0 < p < 1$, akkor $\|\xi\|_p$ nem teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, így nem norma L_p-n. Azonban, L_p ekkor is teljes metrikus tér a $d(\xi, \eta) := \mathbb{E}|\xi - \eta|^p$ metrikával. $\Box$

A konvergenciafajták közötti kapcsolatot az 1. ábra szemléletesen mutatja, amit a továbbiakban részletesen fogunk elemezni.

2.2.3. Feladat. Miért nem követeljük meg az eloszlásban való konvergencia definíciójában, hogy

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}?$$

Megoldás. Egy szemléletes példát konstruálunk. Legyenek c_n, $n \in \mathbb{N}$, és c valós számok. Legyenek továbbá

$$\xi_n(\omega) := c_n, \quad \omega \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}, \qquad\qquad \xi(\omega) := c, \quad \omega \in \Omega.$$

Természetes módon azt várjuk, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ akkor és csak akkor teljesül, ha $c_n \to c$. Ekkor

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant c, \\ 1 & \text{ha} \quad x > c, \end{cases} \qquad \text{és} \qquad F_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant c_n, \\ 1 & \text{ha} \quad x > c_n. \end{cases}$$

Ha $c_n \uparrow c$ oly módon, hogy $c_n < c$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $F_{\xi_n}(c) = 1$, $n \in \mathbb{N}$ és $F_\xi(c) = 0$. Így a c pontban nem áll fenn, hogy $F_{\xi_n}(c) \to F_\xi(c)$, de c nem is folytonossági pontja F_ξ-nek. Azonban az fennáll, hogy $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ bármilyen c-től különböző $x \in \mathbb{R}$ esetén. Valóban, ha $x_0 < c$, akkor mivel $c_n \uparrow c$, kapjuk, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $c_n > x_0$ $\forall\, n \geqslant n_0$-ra. Így $F_{\xi_n}(x_0) = 0$, ha $n \geqslant n_0$ és $F_\xi(x_0) = 0$. Ha $x_0 > c$, akkor mivel

$c_n < c < x_0$, kapjuk, hogy $F_{\xi_n}(x_0) = 1$ és $F_\xi(x_0) = 1$. Így megmutattuk, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$, ha $c_n \uparrow c$ oly módon, hogy $c_n < c$, $n \in \mathbb{N}$. Ellenőriztük tehát, hogy $c_n \uparrow c$, $c_n < c$, $n \in \mathbb{N}$, esetén $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$. Látjuk azt is, hogy ha a $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ eloszlásbeli konvergencia definíciója alatt azt értenénk, hogy $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ *bármilyen* $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor a konkrét példában nem teljesülne, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ (várakozásainkkal ellentétben). □

2.2.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy az egyenletes konvergenciából következik az L_p-beli konvergencia.

Megoldás. Az állítás az alábbi becslésből következik:

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p = \int_\Omega |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p \, \mathsf{d}P(\omega) \leqslant \int_\Omega (\|\xi_n - \xi\|_\infty)^p \, \mathsf{d}P(\omega) = \|\xi_n - \xi\|_\infty^p.$$

□

2.2.5. Feladat. Legyen $0 < s < t$. Mutassuk meg, hogy az L_t-beli konvergenciából következik az L_s-beli konvergencia.

Megoldás. A Ljapunov-egyenlőtlenség szerint

$$\Big(\mathbb{E}|\xi|^s\Big)^{1/s} \leqslant \Big(\mathbb{E}|\xi|^t\Big)^{1/t},$$

így

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^s \leqslant \Big(\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^t\Big)^{s/t}.$$

Felhasználva, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^t = 0$, kapjuk az állítást. □

2.2.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy az egyenletes konvergenciából következik a majdnem biztos konvergencia.

Megoldás. Tetszőlegesen rögzített $\omega \in \Omega$ esetén

$$|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leqslant \|\xi_n - \xi\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Az $n \to \infty$ határátmenetet véve, minden $\omega \in \Omega$ esetén megkapjuk a konvergenciát, azaz a pontonkénti konvergencia is következik az egyenletes konvergenciából. □

2.2.7. Feladat. Legyen $0 < p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy az L_p-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Megoldás. A sztochasztikus konvergencia definícióját alapul véve könnyen átgondolható, hogy $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi|^p \geqslant \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

A Markov-egyenlőtlenség alapján:

$$P(|\xi_n - \xi|^p \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p}{\varepsilon}.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p = 0$, $n \to \infty$ határátmenetet véve kapjuk az állítást. □

2.2.8. Feladat. Mutassuk meg, hogy a majdnem mindenütti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Megoldás. Azt kell bizonyítani, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0.$$

A kiindulási feltétel azt jelenti, hogy

$$P\big(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}\big) = 1,$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$P\big(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\}\big) = 0.$$

Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n := \{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}$. Megmutatjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\}. \tag{2.2.10}$$

Az első tartalmazás igazolásához tekintsük az alábbiakat. Ha $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, akkor $\exists\ (n_k)_{k=1}^\infty$ részsorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re $|\xi_{n_k}(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon$. Ha ekkor az teljesülne, hogy $\limsup_{n\to\infty} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon$, akkor egy analízisbeli tétel miatt $|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon$ lenne legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével. Ez azonban ellentmond az $(n_k)_{k=1}^\infty$ sorozat létezésének.

A második tartalmazás abból következik, hogy ha $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, akkor $\limsup_{n\to\infty} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| = 0$.

A valószínűség monotonitása miatt (2.2.10) alapján kapjuk, hogy

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant P(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \nrightarrow \xi(\omega)\}) = 0.$$

Így $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. Ezért

$$0 = P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{n=m}^\infty A_n\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{n=m}^\infty A_n\right) \geqslant \limsup_{m\to\infty} P(A_m) \geqslant 0.$$

Azaz $\limsup_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, amiből már következik, hogy létezik a $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ határérték és nullával egyenlő. Ez pedig pontosan a bizonyítandó állítást jelenti. □

2.2.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy a sztochasztikus konvergenciából következik az eloszlásban való konvergencia!

Megoldás. Jelölje ξ_n és ξ eloszlásfüggvényeit F_{ξ_n}, ill. F_ξ. Azt kell megmutatnunk, hogy $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban, ahol F_ξ folytonos, azt felhasználva, hogy $\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = 0$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_n := \big\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\big\}.$$

Az $F_{\xi_n}(x) = P(\xi_n < x)$ értéket alulról és felülről is megbecsüljük az F_ξ eloszlásfüggvény alkalmas helyen felvett értékeivel.

Először a felső becsléssel foglalkozunk. Ekkor

$$P(\xi_n < x) = P(\xi_n < x \,|\, A_n)P(A_n) + P(\xi_n < x \,|\, \Omega \setminus A_n)P(\Omega \setminus A_n).$$

Mivel $P(A) \leqslant 1$, $P(A \,|\, B) \leqslant 1$ tetszőleges A, B eseményekre,

$$P(\xi_n < x) \leqslant P(\xi_n < x \,|\, A_n) + P(\Omega \setminus A_n). \tag{2.2.11}$$

Felhasználva azt, hogy ha A, B olyan események, hogy $A \subseteq B$, akkor $A \cap B = A$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\xi_n < x \,|\, A_n) &= \frac{P(\xi_n < x, A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(\xi_n < x, \xi - \varepsilon < \xi_n < \xi + \varepsilon)}{P(A_n)} \\ &= \frac{P(\xi_n < x, A_n, \xi < x + \varepsilon)}{P(A_n)} \leqslant \frac{P(\xi < x + \varepsilon)}{P(A_n)}. \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Mivel $\xi_n \overset{st}{\to} \xi$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(\Omega \setminus A_n) = 0, \quad \forall\ \varepsilon > 0, \tag{2.2.13}$$

így $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. Ezért $\limsup$-ot véve (2.2.12)-ben, kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} P(\xi_n < x \,|\, A_n) \leqslant P(\xi < x + \varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Így (2.2.11) és (2.2.13) alapján,

$$\limsup_{n\to\infty} P(\xi_n < x) \leqslant P(\xi < x + \varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Rátérünk az alsó becslés bizonyítására. Ekkor

$$\begin{aligned} P(\xi_n < x) &\geqslant P(\xi_n < x \,|\, A_n)P(A_n) = P(A_n)(1 - P(\xi_n \geqslant x \,|\, A_n)) \\ &= P(A_n) - P(\xi_n \geqslant x, A_n) = P(A_n) - P(\xi_n \geqslant x, A_n, x - \varepsilon < \xi) \\ &\geqslant P(A_n) - P(x - \varepsilon < \xi) \geqslant P(A_n) - P(x - \varepsilon \leqslant \xi) \\ &= P(A_n) - 1 + P(x - \varepsilon > \xi) = P(\xi < x - \varepsilon) - P(\Omega \setminus A_n). \end{aligned}$$

Így (2.2.13) alapján

$$\liminf_{n\to\infty} P(\xi_n < x) \geqslant P(\xi < x - \varepsilon), \qquad \varepsilon > 0.$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$P(\xi < x - \varepsilon) \leqslant \liminf_{n\to\infty} P(\xi_n < x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} P(\xi_n < x) \leqslant P(\xi < x + \varepsilon).$$

Mivel F_ξ eloszlásfüggvény, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll, hogy

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} P(\xi < x - \varepsilon) = F_\xi(x), \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} P(\xi < x + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F_\xi(x + \varepsilon) = F_\xi(x + 0).$$

Jelen esetben, mivel $x \in \mathbb{R}$ folytonossági pontja F_ξ-nek, $F_\xi(x + 0) = F_\xi(x)$. Így a rendőrtétel miatt létezik a $\lim_{n\to\infty} P(\xi_n < x)$ határérték és $F_\xi(x)$-el egyenlő. □

A következőkben ellenpéldákat keresünk arra vonatkozóan, hogy a fentiekben nem bizonyított irányokban általában nem igazolható semmi.

2.2.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy a P-majdnem mindenütti konvergenciából általában nem következik az egyenletes konvergencia.

Megoldás. 1. Ellenpélda. Tekintsük az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\eta)$ valószínűségi mezőt, ahol P_η valamely η valószínűségi változó eloszlása. Legyen továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{ha} \quad \omega \in (-\infty, n], \\ n & \text{ha} \quad \omega \in [n, +\infty), \end{cases}$$

és legyen $\xi(\omega) := \omega$, $\omega \in \Omega$. Lásd a 2. ábrát!

Ekkor, ha $\omega_0 \in \mathbb{R}$ rögzített, akkor $\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega_0) = \xi(\omega_0)$, ugyanis $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geqslant n_0$ esetén $n \geqslant \omega_0$, és így $\xi_n(\omega_0) = \omega_0$, ha $n \geqslant n_0$. Jelen esetben tehát pontonkénti konvergencia áll fenn. Viszont,

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| = +\infty,$$

így az egyenletes konvergencia nem teljesül.

2. Ellenpélda. Tekintsük a $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ valószínűségi mezőt, ahol λ a $[0,1]$-en definiált Lebesgue-mértéket jelöli. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n(x) := x^n$, $x \in [0,1]$ és

$$\xi(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \in [0,1), \\ 1 & \text{ha} \quad x = 1. \end{cases}$$

Ekkor ξ_n pontonként konvergál $[0,1]$-en ξ-hez, mert, ha $x \in [0,1)$, akkor $x^n \to 0$, ha pedig $x = 1$, akkor $x^n \to 1$.

Azonban $[0,1]$-en nem konvergál ξ_n egyenletesen ξ-hez, mert folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye folytonos, de itt a határfüggvény nem folytonos $x = 1$-ben. □

2.2.11. Megjegyzés. Az alábbiakban arról szólunk, hogy az 1. ábrán az egyenletes és a P-majdnem mindenütti konvergencia közé beékelhető, az úgynevezett P-majdnem (mindenütt) egyenletes konvergencia.

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, $f : X \to \mathbb{C}$, $f_n : X \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$-mérhető függvények. Ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0 \qquad \text{és} \qquad \mu(X \setminus A) < \varepsilon,$$

akkor azt mondjuk, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-majdnem egyenletesen konvergál f-hez.

Tétel (Jegorov): Ha $\mu(X) < +\infty$, akkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) $f_n \to f$ μ-majdnem mindenütt,

(ii) $f_n \to f$ μ-majdnem egyenletesen.

A következőkben leellenőrizzük, hogy a 2.2.10. Feladat 1. és 2. ellenpéldájában megkonstruált P-m.m. konvergens sorozatok tényleg P-majdnem egyenletesen konvergensek.

Az 1. ellenpélda esetében, bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\, M_\varepsilon \in \mathbb{N} :\ P_\eta(\mathbb{R} \setminus [-M_\varepsilon, M_\varepsilon]) < \varepsilon$. Legyen $A_\varepsilon := [-M_\varepsilon, M_\varepsilon]$. Ekkor

$$\sup_{\omega\in A_\varepsilon} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n \geqslant M_\varepsilon, \\ M_\varepsilon - n & \text{ha} \quad M_\varepsilon > n. \end{cases}$$

Így $\sup_{\omega\in A_\varepsilon} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \to 0$, ha $n \to \infty$.

A 2. ellenpéldában bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\, 0 < a_\varepsilon < 1 : \lambda([0, 1] \setminus [0, a_\varepsilon]) < \varepsilon$. Legyen $A_\varepsilon := [0, a_\varepsilon]$. Ekkor

$$\sup_{x\in A_\varepsilon} |\xi_n(x) - \xi(x)| = \sup_{x\in A_\varepsilon} |x^n| \leqslant a_\varepsilon^n.$$

Így $\sup_{x\in A_\varepsilon} |\xi_n(x) - \xi(x)| \to 0$, ha $n \to \infty$. □

2.2.12. Feladat. Legyen $0 < p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy az L_p-beli konvergenciából általában nem következik az egyenletes konvergencia.

Megoldás. A 2.2.10. Feladat 2. ellenpéldájában szereplő ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, és ξ választás megfelelő. Ugyanis

$$\int_0^1 (\xi_n(x) - \xi(x))^p \,\mathsf{d}x = \int_0^1 x^{pn} \,\mathsf{d}x = \left[\frac{x^{pn+1}}{pn+1}\right]_0^1 = \frac{1}{pn+1} \to 0, \quad \text{ha} \ n \to \infty.$$

(Ebből a levezetésből az is látszik, hogy $\mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$.) Így $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, és a 2.2.10. Feladatban láttuk, hogy egyenletes konvergencia nem áll fönn. □

2.2.13. Feladat. Legyen $0 < p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy az L_p-beli konvergenciából általában nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia.

Megoldás. Tekintsük az $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ valószínűségi mezőt, ahol λ a $[0,1]$-en definiált Lebesgue-mértéket jelöli. Legyen $\xi(\omega) := 0$, $\omega \in \Omega$. A ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, sorozatot értelmezzük a 3.-4. ábrán látható módon.

Ekkor $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, mert bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geqslant n_0$ esetén $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, azaz $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0$. Viszont ξ_n nem tart P-majdnem mindenütt ξ-hez, mert tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n(\omega) = 0$, és végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n(\omega) = 1$. □

2.2.14. Feladat. Legyen $p > 0$. Mutassuk meg, hogy a P-majdnem mindenütti konvergenciából általában nem következik az L_p-beli konvergencia.

Megoldás. Tekintsük az $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ valószínűségi mezőt, ahol λ a $[0,1]$-en definiált Lebesgue-mértéket jelöli. Legyen $\xi(\omega) := 0$, $\omega \in \Omega$. A ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, sorozatot értelmezzük az 5. ábrán látható módon.

Ekkor ξ_n P-majdnem mindenütt konvergál ξ-hez, mert minden $\omega \in (0,1]$ esetén létezik $N(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant N(\omega)$ esetén $1/n \leqslant \omega$, és így $\xi_n(\omega) = 0$, illetve $\xi_n(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ha $\omega = 0$, akkor $\xi_n(\omega) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ és így $\xi_n(0) \to \xi(0) = 0$ is teljesül.

Viszont $\xi_n \overset{L_p}{\not\to} \xi$, mert

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p = \int_0^1 n^2 \mathbb{1}_{\{x < \frac{1}{n}\}}\,\mathsf{d}x = n \to +\infty.$$

□

2.2.15. Feladat. Legyen $p > 0$. Mutassuk meg, hogy a sztochasztikus konvergenciából általában nem következik az L_p-beli konvergencia.

Megoldás. A 2.2.14. Feladatban megadott ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ választás egy megfelelő példát szolgáltat. Ugyanis, mivel

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \forall\ \varepsilon > 0,$$

kapjuk, hogy $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$. Viszont $\xi_n \overset{L_p}{\not\to} \xi$. □

2.2.16. Feladat. Mutassuk meg, hogy a sztochasztikus konvergenciából általában nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia.

Megoldás. Ugyanaz az ellenpélda megfelel, mint amit a 2.2.13. Feladatban adtunk arra, hogy az L_p-beli konvergenciából általában nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia. □

2.2.17. Példa. Egy újabb példát nézünk arra vonatkozóan, hogy a sztochasztikus konvergenciából nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia. Legyen

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) := \big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda\big),$$

ahol λ a $[0,1]$-en definiált Lebesgue-mértéket jelöli. Mivel a racionális számok halmaza, $\mathbb{Q}$ megszámlálható, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ is megszámlálható, így írható, hogy $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{r_k, k\in\mathbb{N}\}$. Írjuk fel az r_k racionális számot relatív prímek hányadosaként: $r_k = p_k/q_k$, $k\in\mathbb{N}$. Legyen

$$\xi_k(x) := e^{-(p_k - xq_k)^2}, \quad x\in[0,1],\ k\in\mathbb{N},$$

és $\xi(x)=0$, $x\in[0,1]$. Mutassuk meg, hogy $\xi_k \xrightarrow{st} 0$, de ξ_k nem tart ξ-hez P-majdnem mindenütt.

Ahhoz, hogy $\xi_k \xrightarrow{st} 0$ azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen $\varepsilon>0$-ra

$$\lim_{k\to\infty} P(|\xi_k|\geqslant\varepsilon) = 0.$$

Ha $\varepsilon>1$, akkor

$$\{|\xi_k|\geqslant\varepsilon\} = \{x\in[0,1] : e^{-(p_k-xq_k)^2}\geqslant\varepsilon\} = \emptyset,$$

hiszen $e^{-(p_k-xq_k)^2}\leqslant 1$, $x\in[0,1]$.

Ha $0<\varepsilon\leqslant 1$, akkor

$$\begin{aligned}\big\{x\in[0,1] : |\xi_k(x)|\geqslant\varepsilon\big\} &= \big\{x\in[0,1] : (p_k-xq_k)^2 \leqslant -\log\varepsilon\big\}\\ &= \Big\{x\in[0,1] : \frac{p_k-\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}}{q_k}\leqslant x\leqslant\frac{p_k+\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}}{q_k}\Big\},\end{aligned}$$

hiszen $(p_k-xq_k)^2\leqslant -\log\varepsilon$ akkor és csak akkor, ha $-\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}\leqslant xq_k-p_k\leqslant\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}$. Így

$$P(|\xi_k|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{2\sqrt{\log\varepsilon^{-1}}}{q_k}.$$

(Azért szerepel $\leqslant$ az előző egyenlőtlenségben, mert nem biztos, hogy $(p_k-\sqrt{\log\varepsilon^{-1}})/q_k$ és $(p_k+\sqrt{\log\varepsilon^{-1}})/q_k$ a $[0,1]$ intervallumban vannak.)

Megmutatjuk, hogy $q_k\to+\infty$. Tegyük fel indirekt, hogy $q_k\not\to+\infty$, azaz $\exists\, M>0$, hogy $\forall\, k_0\in\mathbb{N}$ esetén $\exists\, k\geqslant k_0$, hogy $q_k<M$. Azonban az M-nél kisebb nevezőjű r_k-k csak véges sokan vannak (hiszen $r_k\in[0,1]$, $k\in\mathbb{N}$), így találhatunk olyan $K_M\in\mathbb{N}$ indexet, hogy ha $k>K_M$, akkor r_k nevezője nagyobb, mint M. Így $k_0:=K_M$ választással ellentmondásra jutunk. Tehát $q_k\to+\infty$. És így $P(|\xi_k|\geqslant\varepsilon)\to 0$.

Az alábbiakban azt mutatjuk meg, hogy a $\lim_{k\to\infty}\xi_k(x)$ határérték nem létezik semmilyen $x\in[0,1]$ pontban. Legyen a továbbiakban $x\in[0,1]$ rögzített. Tekintsünk egy olyan racionális számokból álló $(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy létezik a $\lim_{n\to\infty} r_{k_n}$ határérték és értéke egy x-től különböző irracionális szám. Ekkor $(p_{k_n}-xq_{k_n})^2 = q_{k_n}^2(r_{k_n}-x)^2$ és $(r_{k_n}-x)^2\to a$, ahol $a>0$ egy pozitív valós szám.

Mivel $\exists\lim_{n\to\infty} r_{k_n}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, q_{k_n} nem lehet korlátos, és így létezik olyan részsorozata, mely $+\infty$-hez tart. Tegyük fel, hogy ez a részsorozat most az egész $(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat (egyébként át kellene rá térni). Így $(p_{k_n}-xq_{k_n})^2\to+\infty$, ha $n\to\infty$, és ezért $\xi_{k_n}(x)\to 0$.

Most konstruálunk egy másik részsorozatot, ami mentén a határérték nem létezik. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat, hogy

$$|r_{k'_n} - x| = \left|\frac{p_{k'_n}}{q_{k'_n}} - x\right| \leqslant \frac{C(x)}{q_{k'_n}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ahol $C(x) \in \mathbb{R}$ egy x-től függő konstans.

Ha $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, akkor $x = a/b$, ahol a és b relatív prímek, és az $r_{k'_n} := a/b$, $n \in \mathbb{N}$ választás megfelelő. Ekkor $q_{k'_n} = b$, $n \in \mathbb{N}$.

Ha $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$, akkor felhasználva azt, hogy az irracionális számok legalább másodrendben approximálhatók, kapjuk, hogy léteznek olyan páronként különböző $r_{k'_n} = p_{k'_n}/q_{k'_n} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ racionális számok, hogy

$$\left|x - \frac{p_{k'_n}}{q_{k'_n}}\right| \leqslant \frac{C(x)}{q_{k'_n}^2} \leqslant \frac{C(x)}{q_{k'_n}}$$

és $(q_{k'_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nem korlátos sorozat.

Így

$$\xi_{k'_n}(x) = e^{-(p_{k'_n} - x q_{k'_n})^2} \geqslant e^{-C(x)^2} > 0,$$

és ezért

$$\liminf_{n\to\infty} \xi_{k'_n}(x) \geqslant e^{-C(x)^2} > 0.$$

Azaz nem létezik a $\lim_{n\to\infty} \xi_n(x)$ határérték. □

2.2.18. Megjegyzés. Az előző két feladatban (2.2.16. Feladat és 2.2.17. Példa) láttuk, hogy a sztochasztikus konvergenciából általában nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia. Viszont van ún. részleges visszafele irány.

Riesz-féle kiválasztási tétel: Ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, akkor $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek van olyan $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, hogy $\xi_{n_k}(\omega) \to \xi(\omega)$ P-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén. □

2.2.19. Megjegyzés. A 2.2.13. Feladatban láttuk, hogy az L_p-beli konvergenciából nem következik a P-majdnem mindenütti konvergencia, de az előző megjegyzés nyomán itt is van részleges visszafele irány. Valóban, az L_p-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, és így alkalmazható a Riesz-féle kiválasztási tétel. □

2.2.20. Megjegyzés. A 2.2.15. Feladat alapján: a sztochasztikus konvergenciából általában nem következik az L_1-beli konvergencia, de bizonyos majorálási feltétel mellett igen.

Tétel: Ha $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$ és létezik olyan $\eta : \Omega \to [0, +\infty)$ valószínűségi változó, amire minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\xi_n| \leqslant \eta$ és $\mathbb{E}\eta < +\infty$, akkor $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$. □

2.2.21. Megjegyzés. (Javított Dominált Konvergencia Tétel) Legyenek $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$,

(ii) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ és $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ egyenletesen integrálható, azaz

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(|\xi_n| \mathbb{1}_{\{|\xi_n|>M\}}\big) = 0.$$

□

2.2.22. Feladat. Legyen P a $[0,1]$ intervallumon definiált Lebesgue-mérték, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén P_n az a mérték, mely $1/n$ súlyt helyez az $(i-1)/n$, $i = 1, \dots, n$ pontok mindegyikébe.

(i) Mutassuk meg, hogy P_n tart P-hez gyengén.

(ii) Tekintsük a $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ valószínűségi mezőt. Adjunk példát olyan $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változókra, hogy $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ és ξ eloszlása rendre P_n, $n \in \mathbb{N}$, illetve P, és fennáll, hogy $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$.

Megoldás. (i): Ahhoz, hogy P_n tart P-hez gyengén elég azt igazolni, hogy bármilyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvényre

$$\int_0^1 f(x)\, \mathsf{d}P_n(x) \to \int_0^1 f(x)\, \mathsf{d}P(x).$$

Mivel f folytonos, és

$$\int_0^1 f(x)\, \mathsf{d}P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n},$$

a Riemann-integrál definíciója miatt kapjuk, hogy a fenti konvergencia fennáll.

(ii): A következőkben olyan valószínűségi változókat konstruálunk a $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ valószínűségi mezőn, melyeknek rendre P_n, ill. P az eloszlásuk.

Legyen minden $\omega \in [0,1]$ esetén $\xi(\omega) := \omega$. Ennek valóban P az eloszlása, hiszen minden $B \in \mathcal{B}([0,1])$ esetén

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = P(\{\omega : \omega \in B\}) = P(B).$$

Legyen továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\xi_n(\omega) := \sum_{k\,:\,0<k/n\leqslant\omega} \frac{1}{n}.$$

Mivel $0 < k/n \leqslant \omega \Longleftrightarrow k = 1, \dots, [n\omega]$,

$$\xi_n(\omega) = \frac{[n\omega]}{n},$$

és így minden $B \in \mathcal{B}([0,1])$ esetén

$$P_{\xi_n}(B) = P(\{\omega : \xi_n(\omega) \in B\}) = P_n(B).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor létezik olyan $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $1/n(\varepsilon) < \varepsilon$. Így bármilyen $n \geqslant n(\varepsilon)$ esetén $1 < \varepsilon n$. Továbbá

$$\begin{aligned}
|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \xi_n(\omega) - \xi(\omega) \geqslant \varepsilon \quad \text{vagy} \quad \xi_n(\omega) - \xi(\omega) \leqslant -\varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \qquad \frac{[n\omega]}{n} - \omega \geqslant \varepsilon \quad \text{vagy} \quad \frac{[n\omega]}{n} - \omega \leqslant -\varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \qquad [n\omega] - n\omega \geqslant n\varepsilon \quad \text{vagy} \quad [n\omega] - n\omega \leqslant -n\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ezért

$$1 < \varepsilon n \leqslant [n\omega] - n\omega \leqslant n\omega - n\omega = 0,$$

ami pedig ellentmondás. Hasonlóan,

$$-1 > -n\varepsilon \geqslant [n\omega] - n\omega > n\omega - 1 - n\omega = -1,$$

ami szintén ellentmondás. Ezért $n \geqslant n(\varepsilon)$ esetén

$$\big\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\big\} = \emptyset,$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\Big) = 0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

□

2.2.23. Feladat. Mutassuk meg, ha $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} c$, ahol $c \in \mathbb{R}$, akkor $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} c$. (Azaz ha egy valószínűségi változó sorozat eloszlásban tart egy valós konstanshoz, akkor sztochasztikusan is konvergál hozzá, ez is egyfajta részleges visszafele irány.)

Megoldás. Mivel $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} c$, kapjuk, hogy

$$F_{\xi_n}(x) \to \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x > c, \\ 0 & \text{ha} \quad x < c, \end{cases}$$

hiszen

$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant c, \\ 1 & \text{ha} \quad x > c, \end{cases}$$

és F_c-nek minden $x \neq c$ folytonossági pontja. Legyen $\varepsilon > 0$, azt kell megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - c| > \varepsilon) = 0.$$

Ekkor

(2.2.14)
$$\begin{aligned}
P(|\xi_n - c| > \varepsilon) &= 1 - P(|\xi_n - c| \leqslant \varepsilon) = 1 - P(c - \varepsilon \leqslant \xi_n \leqslant c + \varepsilon) \\
&= 1 - P(\xi_n \leqslant c + \varepsilon) + P(\xi_n < c - \varepsilon) = 1 - P(\xi_n \leqslant c + \varepsilon) + F_{\xi_n}(c - \varepsilon).
\end{aligned}$$

A korábbiak alapján $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(c-\varepsilon) = 0$. Továbbá felhasználva, hogy

$$\{\xi_n < c + \varepsilon/2\} \subseteq \{\xi_n \leqslant c + \varepsilon\},$$

kapjuk, hogy

$$P\big(\{\xi_n < c + \varepsilon/2\}\big) \leqslant P\big(\{\xi_n \leqslant c + \varepsilon\}\big),$$

és így

$$1 = \lim_{n\to\infty} P(\xi_n < c + \varepsilon/2) = \limsup_{n\to\infty} P(\xi_n < c + \varepsilon/2) \leqslant \limsup_{n\to\infty} P(\{\xi_n \leqslant c + \varepsilon\}) \leqslant 1.$$

Azaz $\limsup_{n\to\infty} P(\{\xi_n \leqslant c+\varepsilon\}) = 1$. Hasonlóan $\liminf_{n\to\infty} P(\{\xi_n \leqslant c+\varepsilon\}) = 1$. Mindezek miatt létezik a $\lim_{n\to\infty} P(\{\xi_n \leqslant c + \varepsilon\})$ határérték és 1-el egyenlő.

Vegyünk $n \to \infty$ határátmenetet (2.2.14)-ben:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - c| > \varepsilon) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

□

2.2.24. Példa. Az alábbiakban egy példát adunk arra vonatkozóan, hogy az eloszlásban való konvergenciából általában nem következik a sztochasztikus konvergencia.

Tegyük fel, hogy a $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi változó sorozat eloszlásban konvergál ξ-hez, ahol ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. (A centrális határeloszlás tételre gondolva ez nagyon természetes dolog.) Legyen továbbá η egy olyan standard normális eloszlású valószínűségi változó, mely független a $\{\xi, \xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ rendszertől. (Belátható, hogy ilyen η létezik.) Mivel $F_\xi(x) = F_\eta(x),\ x \in \mathbb{R}$, és $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$, a folytonossági tétel alapján kapjuk, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \eta$. Megmutatjuk, hogy $\xi_n \xrightarrow{st} \eta$ nem teljesül.

Tegyük fel indirekt, hogy $\xi_n \xrightarrow{st} \eta$. Ekkor $\xi_n - \eta \xrightarrow{st} 0$, és az 2.2.23. Feladat nyomán $\xi_n - \eta \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. A következőkben felhasználjuk azt a tényt, hogy ha $X \overset{\mathcal{D}}{=} Y$, akkor $X + Z \overset{\mathcal{D}}{=} Y + Z$ minden olyan Z valószínűségi változóra, mely független X-től és Y-tól is (ez karakterisztikus függvények segítségével könnyen belátható). Mivel $\eta \overset{\mathcal{D}}{=} -\eta$, és ξ_n független η-tól és $-\eta$-tól is, kapjuk, hogy $\xi_n - \eta \overset{\mathcal{D}}{=} \xi_n + \eta$. Felhasználva, hogy $\xi_n - \eta \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, kapjuk, hogy $\xi_n + \eta \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Így a folytonossági tétel miatt $\varphi_{\xi_n+\eta}(t) \to 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Mivel ξ_n és η függetlenek, $\varphi_{\xi_n}(t)\varphi_\eta(t) \to 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Ugyanakkor, mivel $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$, kapjuk, hogy

$$\varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_{\xi_n}(t)\varphi_\eta(t) \to \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t) = (\varphi_\eta(t))^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Így $(\varphi_\eta(t))^2 = 1,\ t \in \mathbb{R}$. Mivel $\varphi_\eta(t) = e^{-t^2/2}$, kapjuk, hogy $e^{-t^2} = 1,\ t \in \mathbb{R}$, ami pedig nyilvánvalóan ellentmondás. Így nem igaz az, hogy $\xi_n \xrightarrow{st} \eta$. □

2.2.25. Feladat. Az alábbi feladatban arra adunk egy újabb példát, hogy az eloszlásban való konvergenciából általában nem következik a sztochasztikus konvergencia (Stromberg [13] 38. old. és 94. old. alapján).

Legyen $\Omega := [0,1[$, $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$, és $P := \lambda|_{\mathcal{A}}$, ahol λ a $[0,1[$-en definiált Lebesgue-mértéket jelöli. Legyen minden $\omega \in \Omega$ esetén $\{d_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ az $\omega \in [0,1[$ valós szám diadikus törtbefejtése. Azaz $\omega \in [0,1[$ esetén a $\{d_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ sorozatot az alábbi rekurzióval definiáljuk: $d_1(\omega) := [2\omega]$, $d_{n+1}(\omega) := [2^{n+1}\omega - (d_1(\omega)2^n + \cdots + d_n(\omega)2)]$. (Itt $[x]$ egy x valós szám egészrészét jelöli.) Analízisből tanultuk, hogy erre a $\{d_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ sorozatra igazak az alábbiak

(a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $d_n(\omega) \in \{0,1\}$,

(b) nem létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, melyre $d_n(\omega) = 1$ bármilyen $n > n_0$ esetén,

(c) a ω számot meghatározza a diadikus törtbefejtése az alábbi értelemben

$$\omega = \sup\left\{\frac{d_1(\omega)}{2} + \cdots + \frac{d_n(\omega)}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Így minden $n \in \mathbb{N}$-re egyértelműen definiáltunk egy $d_n : \Omega \to \{0,1\}$ függvényt.

A. Mutassuk meg, hogy $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $P(d_n = 0) = P(d_n = 1) = \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

B. Mutassuk meg, hogy d_n eloszlásban konvergál d_1-hez, ha $n \to \infty$, de sztochasztikusan nem.

Megoldás. A: Minden $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$ esetén legyen

$$I_{n,k} := \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[,$$

azaz $I_{n,k}$-val jelöljük az n-ed rendű diadikus intervallumokat. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a $d_n : \Omega \to \{0,1\}$ függvény olyan, hogy minden $I_{n,k}$-n konstans, nevezetesen,

$$d_n|_{I_{n,k}} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \text{ páratlan}, \\ 1 & \text{ha} \quad k \text{ páros}. \end{cases}$$

Ha $n = 1$, úgy

$$d_1(\omega) = \begin{cases} [2\omega] = 0 & \text{ha} \quad \omega \in [0, 1/2), \\ [2\omega] = 1 & \text{ha} \quad \omega \in [1/2, 1). \end{cases}$$

Az $n = 1$ esetet szemléletesen mutataja a 6. ábra.

Ha $n = 2$, úgy

$$d_2(\omega) = \begin{cases} [2^2\omega] = 0 & \text{ha} \quad \omega \in [0, 1/4), \\ [2^2\omega] = 1 & \text{ha} \quad \omega \in [1/4, 2/4), \\ [2^2\omega - 2] = 0 & \text{ha} \quad \omega \in [2/4, 3/4), \\ [2^2\omega - 2] = 1 & \text{ha} \quad \omega \in [3/4, 4/4), \end{cases}$$

hiszen

$$d_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \omega \in [0, 1/4), \\ 0 & \text{ha} \quad \omega \in [1/4, 2/4), \\ 1 & \text{ha} \quad \omega \in [2/4, 3/4), \\ 1 & \text{ha} \quad \omega \in [3/4, 4/4). \end{cases}$$

Az $n = 2$ esetet szemléletesen mutataja a 7. ábra.

Hasonlóan bizonyítható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén is igaz a dolog. Így d_n Borel–mérhető, mert $d_n^{-1}(\{0\})$ és $d_n^{-1}(\{1\})$ is balról zárt, jobbról nyílt intervallumok uniója. Azaz d_n valószínűségi változó minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Felhasználva, hogy d_n az $I_{n,k}$ intervallumok felén 1, felén 0 és $I_{n,k}$ hossza $1/2^n$, kapjuk, hogy

$$P(d_n = 0) = P(d_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Azt kell még ellenőriznünk, hogy $d_n, n \in \mathbb{N}$ függetlenek. Legyenek $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ pozitív egész számok, és $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r \in \{0, 1\}$ adottak. Azt kell megmutatni, hogy

$$P(d_{n_j} = \varepsilon_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r) = \frac{1}{2^r}.$$

Az előző intervallumos gondolatmenet alapján könnyen láthatjuk, hogy az $A_r := \{d_{n_j} = \varepsilon_j, 1 \leqslant j \leqslant r\}$ esemény n_r-ed rendű diadikus intervallumok uniója. Nyilván, $A_r \subseteq A_{r-1}$ minden $r > 1$ esetén. Minden $I_{n_{r-1},k} \subseteq A_{r-1}$ intervallum $2^{n_r - n_{r-1}}$ számú diszjunkt, szomszédos n_r-ed rendű diadikus intervallum uniója (az előző gondolatmenet alapján) és ezek felén lesz $d_{n_r} = \varepsilon_r$, azaz pontosan ezen intervallumok uniója lesz A_r. Mivel $P(A_1) = P(d_{n_1} = \varepsilon_1) = 1/2$, az előző gondolatmenetet is felhasználva r-szerinti teljes indukcióval kaphatjuk, hogy

$$P(A_r) = \frac{1}{2} P(A_{r-1}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^r}.$$

Ezért $d_n, n \in \mathbb{N}$ függetlenek.

B: Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} d_1$, kapjuk, hogy $d_n \xrightarrow{\mathcal{D}} d_1$. Legyen $m \neq n$, ekkor a függetlenség alapján

$$\begin{aligned} P(|d_n - d_m| = 1) &= P(d_n = 1, d_m = 0) + P(d_m = 1, d_n = 0) \\ &= P(d_n = 1)P(d_m = 0) + P(d_m = 1)P(d_n = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó. Felhasználva, hogy

$$|d_m - d_n| \leqslant |d_m - X| + |X - d_n|,$$

kapjuk, hogy

$$\{|d_m - d_n| = 1\} \subset \{|d_m - X| \geqslant 1/2\} \cup \{|d_n - X| \geqslant 1/2\}. \tag{2.2.15}$$

Ugyanis, ellenkező esetben ellentmondásra jutnánk:

$$|d_m - d_n| \leqslant |d_m - X| + |d_n - X| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Tegyük fel indirekt, hogy $d_n \xrightarrow{st} X$. Ekkor $\varepsilon = 1/2$ választással

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(|d_n - X| \geqslant \frac{1}{2}\Big) = 0.$$

Így létezik olyan $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > k_0$ esetén $P(|d_k - X| \geqslant \frac{1}{2}) < 1/4$.

Felhasználva (2.2.15)-ot kapjuk, hogy ha $m, n > k_0$, $m \neq n$, akkor

$$P(|d_m - d_n| = 1) \leqslant P(|d_m - X| \geqslant 1/2) + P(|d_n - X| \geqslant 1/2) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ez pedig ellentmond annak, hogy $P(|d_m - d_n| = 1) = 1/2$, ha $m \neq n$. $\square$

2.2.26. Megjegyzés. Legyenek $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ valószínűségi mértékek $\mathbb{R}$-en, és legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ az előző feladatban definiált valószínűségi mező. Ekkor **léteznek** olyan $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ **független** valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, hogy $X_j \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mu_j$, $j \in \mathbb{N}$. $\square$

A következő feladatban arra látunk egy elégséges feltételt, hogy a P-majdnem mindenütti konvergenciából következik az L_1-beli konvergencia.

2.2.27. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, és ξ nemnegatív valószínűségi változók, melyekre $P(\xi_n \to \xi) = 1$ és $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$.

Megoldás. Mivel $\mathbb{E}\xi < +\infty$ és $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}\xi_n < +\infty$ elegendően nagy $n \in \mathbb{N}$-re. Ezért, ha n elegendően nagy, akkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi - \xi_n| &= \mathbb{E}\Big[(\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geqslant \xi_n\}}\Big] + \mathbb{E}\Big[(\xi_n - \xi)\mathbb{1}_{\{\xi < \xi_n\}}\Big] \\
&= 2\mathbb{E}\Big[(\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geqslant \xi_n\}}\Big] + \mathbb{E}\Big[(\xi_n - \xi)\mathbb{1}_{\{\xi < \xi_n\}} - (\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geqslant \xi_n\}}\Big] \\
&= 2\mathbb{E}\Big[(\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geqslant \xi_n\}}\Big] + \mathbb{E}(\xi_n - \xi).
\end{aligned}$$

Mivel $0 \leqslant (\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geqslant \xi_n\}} \leqslant \xi$, $\mathbb{E}\xi < +\infty$, és $P(\xi_n \to \xi) = 1$ miatt

$$\lim_{n\to\infty} (\xi(\omega) - \xi_n(\omega))\mathbb{1}_{\{\xi(\omega) \geqslant \xi_n(\omega)\}} = 0, \quad \text{P-m.m. } \omega \in \Omega,$$

a dominált konvergencia tétel alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[(\xi - \xi_n)\mathbb{1}_{\{\xi \geqslant \xi_n\}}\Big] = 0.$$

Így felhasználva újra, hogy $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$, adódik, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n - \xi| = 0$, azaz $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$. $\square$

2.2.28. Feladat. Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, akkor $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{E}\xi_n^2 \to \mathbb{E}\xi^2$.

Megoldás. Ekkor a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség alapján

$$|\mathbb{E}\xi_n - \mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi_n - \xi| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^2} \to 0,$$

hiszen a feltétel miatt $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^2 \to 0$. Hasonlóan,

$$|\mathbb{E}\xi_n^2 - \mathbb{E}\xi^2| \leqslant \mathbb{E}|\xi_n^2 - \xi^2| = \mathbb{E}\Big|(\xi_n - \xi)^2 + 2\xi_n\xi - 2\xi^2\Big| \leqslant \mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2 + 2\mathbb{E}|\xi(\xi_n - \xi)|.$$

Mivel

$$\mathbb{E}|\xi(\xi_n - \xi)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}(\xi_n - \xi)^2} \to 0,$$

kapjuk, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 \to \mathbb{E}\xi^2$. □

2.2.29. Feladat. Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{D}^2(\xi_n - \xi) \to 0$, akkor $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$.

Megoldás. Felhasználva a 2.2.38. Feladatot, és, hogy $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$, elég azt belátni, hogy $\xi_n - \mathbb{E}\xi_n \xrightarrow{st} \xi - \mathbb{E}\xi$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$P\big(|\xi_n - \mathbb{E}\xi_n - (\xi - \mathbb{E}\xi)| > \varepsilon\big) = P\big(|(\xi_n - \xi) - \mathbb{E}(\xi_n - \xi)| > \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{D}^2(\xi_n - \xi)}{\varepsilon^2} \to 0.$$

□

2.2.30. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá $c \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}\xi_n \to c$ és $\mathbb{D}^2\xi_n \to 0$, akkor $\xi_n \xrightarrow{st} c$ és $\xi_n \xrightarrow{L_2} c$.

Megoldás. Mivel $\mathbb{D}^2(\xi_n - c) = \mathbb{D}^2\xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, az előző feladat alapján kapjuk, hogy $\xi_n \xrightarrow{st} c$. Továbbá a Minkowski-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
\|\xi_n - c\|_2 &= \sqrt{\mathbb{E}|\xi_n - c|^2} = \sqrt{\mathbb{E}\big|(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n) + (\mathbb{E}\xi_n - c)\big|^2} \\
&\leqslant \|\xi_n - \mathbb{E}\xi_n\|_2 + \|\mathbb{E}\xi_n - c\|_2 \\
&= \sqrt{\mathbb{E}|\xi_n - \mathbb{E}\xi_n|^2} + \sqrt{\mathbb{E}|\mathbb{E}\xi_n - c|^2} \\
&= \mathbb{D}\xi_n + |\mathbb{E}\xi_n - c| \to 0.
\end{aligned}$$

□

2.2.31. Feladat. Legyen $p \geqslant 1$ és tegyük fel, hogy ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathbb{E}|\xi|^p < +\infty$.

(i) Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$, akkor $\mathbb{E}|\xi_n|^p \to \mathbb{E}|\xi|^p$.

(ii) Legyen $p = 1$. Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_1} \xi$, akkor $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$. Igaz-e ennek a megfordítása?

Megoldás. **(i):** Egyrészt,

$$\big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p} = \|\xi\|_p \leqslant \|\xi - \xi_n\|_p + \|\xi_n\|_p = \big(\mathbb{E}|\xi - \xi_n|^p\big)^{1/p} + \big(\mathbb{E}|\xi_n|^p\big)^{1/p}.$$

Felhasználva, hogy $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0$, kapjuk, hogy

$$\big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \big(\mathbb{E}|\xi_n|^p\big)^{1/p},$$

és így

$$\mathbb{E}|\xi|^p \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p.$$

Másrészt,

$$\big(\mathbb{E}|\xi_n|^p\big)^{1/p} = \|\xi_n\|_p \leqslant \|\xi_n - \xi\|_p + \|\xi\|_p = \big(\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p\big)^{1/p} + \big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p},$$

és így

$$\limsup_{n\to\infty} \big(\mathbb{E}|\xi_n|^p\big)^{1/p} \leqslant \big(\mathbb{E}|\xi|^p\big)^{1/p}.$$

Ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p \leqslant \mathbb{E}|\xi|^p.$$

Összevetve az $\mathbb{E}|\xi|^p$-re kapott két becslést, kapjuk, hogy $\mathbb{E}|\xi_n|^p \to \mathbb{E}|\xi|^p$.

(ii): Ekkor $|\mathbb{E}\xi_n - \mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi_n - \xi| \to 0$ miatt következik az állítás.

A megfordítás viszont nem igaz, ugyanis legyen $\xi \equiv 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ξ_n olyan, hogy

$$P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Ekkor $\mathbb{E}\xi_n = 0, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\xi = 0$, és így $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$. Azonban,

$$\mathbb{E}|\xi_n - \xi| = \mathbb{E}|\xi_n| = 1 \nrightarrow 0.$$

□

2.2.32. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy X egy olyan valószínűségi változó, melyre $X_n \xrightarrow{st} X$. Mutassuk meg, hogy X 1-valószínűséggel konstans.

Első megoldás. Tegyük fel indirekt módon, hogy X nem konstans 1-valószínűséggel. Ekkor léteznek olyan c és ε valós számok, hogy $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ és $P(X < c) > 2\varepsilon$, $P(X \geqslant c + \varepsilon) > 2\varepsilon$, illetve c és $c + \varepsilon$ folytonossági pontjai F_X-nek. Valóban, tegyük fel, hogy bármilyen $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ és F_X bármilyen c folytonossági pontja esetén $F_X(c) \leqslant 2\varepsilon$

vagy $1 - F_X(c+\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon$. Így $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy F_X bármilyen c folytonossági esetén

$$F_X(c) \leqslant 0 \quad \text{vagy} \quad 1 - F_X(c+0) \leqslant 0,$$

azaz $F_X(c) \leqslant 0$ vagy $F_X(c+0) \geqslant 1$. Felhasználva, hogy F_X monoton növekvő és balról folytonos, kapjuk, hogy létezik olyan $c_0 \in \mathbb{R}$, melyre $F_X(x) = 0$, ha $x \leqslant c_0$ és $F_X(x) = 1$, ha $x > c_0$. Azaz $P(X = c_0) = 1$, ez pedig ellentmondt annak, hogy X nem konstans 1-valószínűséggel. Mivel F_X folytonossági pontjainak halmaza sűrű, ε megválasztható úgy, hogy $c + \varepsilon$ is folytonossági pontja legyen F_X-nek.

Mivel $X_n \stackrel{st}{\longrightarrow} X$, kapjuk, hogy $X_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} X$, és így

$$\begin{aligned}
&P(X_n < c) = F_{X_n}(c) \to F_X(c) = P(X < c) > 2\varepsilon, \\
&P(X_n \geqslant c+\varepsilon) = 1 - F_{X_n}(c+\varepsilon) \to 1 - F_X(c+\varepsilon) = P(X \geqslant c+\varepsilon) > 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

hiszen c és $c+\varepsilon$ folytonossági pontjai F_X-nek. Így létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$P(X_n < c) > \varepsilon, \quad P(X_n > c+\varepsilon) > \varepsilon, \quad \text{ha } n \geqslant N.$$

Felhasználva, hogy bármilyen $k, l \in \mathbb{N}$ esetén

$$P(|X_k - X_l| > \varepsilon) \leqslant P(|X_k - X| + |X - X_l| > \varepsilon) \leqslant P(|X_k - X| > \varepsilon/2) + P(|X - X_l| > \varepsilon/2),$$

és, hogy $X_n \stackrel{st}{\longrightarrow} X$, kapjuk, hogy

$$\lim_{k,l\to\infty} P(|X_k - X_l| > \varepsilon) = 0.$$

Így létezik olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $k, l \geqslant M$ esetén

$$P(|X_k - X_l| > \varepsilon) < \varepsilon^3.$$

Legyen a továbbiakban $k, l \geqslant \max(M, N)$, $k \neq l$. Ekkor a függetlenség miatt

$$\varepsilon^3 > P(|X_k - X_l| > \varepsilon) \geqslant P(X_k < c, X_l > c+\varepsilon) = P(X_k < c)P(X_l > c+\varepsilon) > \varepsilon^2.$$

Így $\varepsilon > 1$ lenne, ami ellentmondás.

Második megoldás. (Iglói Endre megoldása) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\xi_n := (X_n, X_{n+1})$. Megmutatjuk, hogy $\xi_n \stackrel{st}{\longrightarrow} (X, X)$, amint $n \to \infty$. Valóban, bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
P\left(\|(X_n, X_{n+1}) - (X, X)\| > \varepsilon\right) &= P\left((X_n - X)^2 + (X_{n+1} - X)^2 > \varepsilon^2\right) \\
&\leqslant P((X_n - X)^2 > \varepsilon^2/2) + P((X_{n+1} - X)^2 > \varepsilon^2/2).
\end{aligned}$$

Mivel $X_n \stackrel{st}{\longrightarrow} X$, kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\|(X_n, X_{n+1}) - (X, X)\| > \varepsilon\right) = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Így fennáll az is, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} (X, X)$, amint $n \to \infty$. Felhasználva, hogy X_n és X_{n+1} függetlenek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, a folytonossági tétel alapján azt is kapjuk, hogy ξ_n határeloszlásának (nevezetesen (X, X)-nek) a koordinátái függetlenek. Ez azt jelenti, hogy az X valószínűségi változó független önmagától. Belátható, hogy ekkor X 1-valószínűséggel konstans. $\square$

2.2.33. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy X egy olyan valószínűségi változó, melyre $X_n \xrightarrow{st} X$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$P(X_n = c) = P(X = c) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Megoldás. Az előző feladat nyomán létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $P(X = c) = 1$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Mivel az azonos eloszlásúság alapján

$$P(|X_n - c| > \varepsilon) = P(|X_1 - c| > \varepsilon), \quad n \in \mathbb{N},$$

kapjuk, hogy

$$P(|X_1 - c| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Így $P(X_1 = c) = 1$, és ezért $P(X_n = c) = 1, n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.2.34. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha létezik olyan $p > 0$, mely esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$, akkor $P(\xi_n \to 0) = 1$.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_n := \{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega)| \geqslant \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor a Markov-egyenlőtlenség alapján

$$P(A_n) = P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon) = P(|\xi_n|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi_n|^p}{\varepsilon^p},$$

és ezért (a feltétel miatt)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty.$$

A Borel–Cantelli-lemma miatt

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0,$$

és így
$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty}\overline{A_k}\Big) = 1.$$
Részletesebben kiírva, minden $\varepsilon > 0$-ra

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega \;\middle|\; \exists\, n(\omega)\in\mathbb{N}:\ \forall\, k \geqslant n(\omega):\ |\xi_k(\omega)|<\varepsilon\right\}\right) = 1. \tag{2.2.16}$$

Ahhoz, hogy $P(\xi_n \to 0) = 1$-et belássuk, azt kell megmutatnunk, hogy
$$P\Big(\{\omega\in\Omega \;\Big|\; \forall\,\varepsilon>0 : \exists\, N(\varepsilon,\omega)\in\mathbb{N}:\ \forall\, n\geqslant N(\varepsilon,\omega):\ |\xi_n(\omega)|<\varepsilon\}\Big) = 1.$$
Végiggondolható, hogy
$$\begin{aligned}\Big\{\omega\in\Omega \;\Big|\; \forall\,\varepsilon>0 : \exists\, N(\varepsilon,\omega)\in\mathbb{N}:\ \forall\, n\geqslant N(\varepsilon,\omega):\ |\xi_n(\omega)|<\varepsilon\Big\}\\ = \bigcap_{m=1}^{+\infty}\{\omega\in\Omega \;\Big|\; \exists\, N(m,\omega)\in\mathbb{N}:\ \forall\, n\geqslant N(m,\omega):\ |\xi_n(\omega)|<1/m\},\end{aligned}$$
és így a valószínűség folytonossága miatt elég azt megmutatnunk, hogy minden $m\in\mathbb{N}$ esetén
$$P\Big(\{\omega\in\Omega \;\Big|\; \exists\, N(m,\omega)\in\mathbb{N}:\ \forall\, n\geqslant N(m,\omega):\ |\xi_n(\omega)|<1/m\}\Big) = 1.$$
Felhasználva (2.2.16)-et $\varepsilon = 1/m$-mel azt kapjuk, hogy
$$\lim_{m\to\infty} P\Big(\{\omega\in\Omega \;\Big|\; \exists\, N(m,\omega)\in\mathbb{N}:\ \forall\, n\geqslant N(m,\omega):\ |\xi_n(\omega)|<1/m\}\Big) = \lim_{m\to\infty} 1 = 1.$$
□

2.2.35. Feladat. Legyenek ξ_n, $n\in\mathbb{N}$, és ξ valószínűségi változók, és ε_n, $n\in\mathbb{N}$, olyan valós számok, hogy $\varepsilon_n\to 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon_n) < +\infty$. Bizonyítandó, hogy ekkor $P(\xi_n\to\xi) = 1$.

Megoldás. A $\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ eseményeket tekintve a Borel–Cantelli-lemma alapján kapjuk, hogy 1 a valószínűsége annak, hogy ezen események közül csak véges sok következik be, azaz azon $\omega\in\Omega$-k halmazának a valószínűsége 1, melyekre $|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)| < \varepsilon_n$ következik be véges sok n kivételével. Mivel $\varepsilon_n\to 0$, kapjuk, hogy $P(\xi_n\to\xi) = 1$.

Ugyanis, ha megadunk egy $\delta>0$ számot, akkor létezik olyan $N_1\in\mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_n<\delta$, ha $n\geqslant N_1$, hiszen $\varepsilon_n\to 0$. Ha $\omega\in\Omega$ a fenti 1-valószínűségű halmaz egy eleme, akkor létezik $N_2\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\geqslant N_2$ esetén $|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\varepsilon_n$. Ha $n\geqslant\max\{N_1,N_2\}$, akkor $|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\delta$. □

2.2.36. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$ és $\xi_n \xrightarrow{st} \eta$, akkor $P(\xi=\eta) = 1$. (Azaz a sztochasztikus konvergencia határértéke 1 valószínűséggel egyértelmű.)

Megoldás. Azt kell belátni, hogy $P(|\xi-\eta| > 0) = 0$. Először megmutatjuk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén $P(|\xi - \eta| > \varepsilon) = 0$. Felhasználva, hogy

$$\{|\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta| > \varepsilon\} \subseteq \{|\xi - \xi_n| > \varepsilon/2\} \cup \{|\xi_n - \eta| > \varepsilon/2\},$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(|\xi - \eta| > \varepsilon) &= P(|\xi - \xi_n + \xi_n - \eta| > \varepsilon) \leqslant P(|\xi - \xi_n| + |\xi_n - \eta| > \varepsilon) \\ &\leqslant P(|\xi - \xi_n| > \varepsilon/2) + P(|\xi_n - \eta| > \varepsilon/2). \end{aligned}$$

Így mivel $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$ és $\xi_n \xrightarrow{st} \eta$, az $\varepsilon \to 0$ határátmenet után adódik, hogy

$$P(|\xi - \eta| > \varepsilon) = 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $A_n := \{|\xi - \eta| > 1/n\}$. Ekkor $P(A_n) = 0, n \in \mathbb{N}$ és

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|\xi - \eta| > 1/n\} = \{|\xi - \eta| > 0\}.$$

Ezért

$$P(|\xi - \eta| > 0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

□

2.2.37. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{st} \eta$ és $P(\xi = \eta) = 1$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén $P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

Megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) &= P(|\xi_n - \xi + \xi - \eta + \eta - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|\xi_n - \xi| + |\xi - \eta| + |\eta - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \\ &\leqslant P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/3) + P(|\xi - \eta| \geqslant \varepsilon/3) + P(|\eta - \eta_n| \geqslant \varepsilon/3). \end{aligned}$$

Mivel $P(\xi = \eta) = 1$, $P(|\xi - \eta| \geqslant \varepsilon/3) = 0$, és mivel $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{st} \eta$ kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/3) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\eta - \eta_n| \geqslant \varepsilon/3) = 0.$$

Így $\limsup_{n\to\infty} P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) = 0$, és ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon)$ határérték és nullával egyenlő. □

2.2.38. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$ és $\eta_n \xrightarrow{st} \eta$, akkor $|\xi_n| \xrightarrow{st} |\xi|$, $\xi_n\eta_n \xrightarrow{st} \xi\eta$, és bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{st} a\xi + b\eta$.

Megoldás. Először annak bizonyítását tárgyaljuk, hogy $|\xi_n| \xrightarrow{st} |\xi|$. Legyen $\varepsilon > 0$. Felhasználva, hogy

$$\big|\,|x| - |y|\big| \leqslant |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

kapjuk, hogy

$$P\big(\big||\xi_n| - |\xi|\big| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0,$$

mert $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$.

Most azt mutatjuk meg, hogy $\xi_n\eta_n \xrightarrow{st} \xi\eta$. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}\{|\xi_n\eta_n - \xi\eta| \geqslant \varepsilon\} &= \big\{|\xi_n\eta_n - \xi\eta_n + \xi\eta_n - \xi\eta| \geqslant \varepsilon\big\} \subseteq \big\{|\eta_n||\xi_n - \xi| + |\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon\big\}\\ &\subseteq \big\{|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2\big\} \cup \big\{|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2\big\}.\end{aligned}$$

Így

$$P(|\xi_n\eta_n - \xi\eta| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2) + P(|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2).$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} P(|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2) = 0$. Minden $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}P(|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2) &= P(|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2, |\xi| \geqslant K) + P(|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2, |\xi| < K)\\ &\leqslant P(|\xi| \geqslant K) + P(|\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/(2K)),\end{aligned}$$

ugyanis

$$\big\{|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2, |\xi| < K\big\} \subseteq \{|\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/(2K)\}.$$

Mivel $\eta_n \xrightarrow{st} \eta$, kapjuk, hogy minden $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$\limsup_{n\to\infty} P(|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2) \leqslant P(|\xi| \geqslant K).$$

Mivel

$$\{|\xi| \geqslant K+1\} \subseteq \{|\xi| \geqslant K\}, \quad \text{és} \quad \bigcap_{K=1}^{+\infty} \{|\xi| \geqslant K\} = \emptyset,$$

a valószínűség folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$0 = P(\emptyset) = \lim_{K\to\infty} P(|\xi| \geqslant K).$$

(Az, hogy $\lim_{K\to\infty} P(|\xi| \geqslant K) = 0$ egyszerűbben is következik, ugyanis

$$\lim_{K\to\infty} P(|\xi| \geqslant K) = \lim_{K\to\infty} (1 - F_{|\xi|}(K)) = 1 - 1 = 0.)$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi||\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/2) = 0.$$

Most megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2) = 0. \tag{2.2.17}$$

Minden $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$P(|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2) = P(|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2, |\eta_n| \geqslant K) + P(|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2, |\eta_n| < K).$$

Mivel

$$\{|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2, |\eta_n| < K\} \subseteq \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/(2K)\},$$

kapjuk, hogy

$$P(|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2) \leqslant P(|\eta_n| \geqslant K) + P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/(2K)).$$

Mivel $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$, minden $K \in \mathbb{N}$ esetén kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} P(|\eta_n||\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/2) \leqslant \limsup_{n\to\infty} P(|\eta_n| \geqslant K).$$

Ekkor minden $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} P(|\eta_n| \geqslant K) &= P(|\eta_n - \eta + \eta| \geqslant K) \leqslant P(|\eta_n - \eta| + |\eta| \geqslant K) \\ &\leqslant P(|\eta_n - \eta| \geqslant K/2) + P(|\eta| \geqslant K/2). \end{aligned}$$

Így mivel $\eta_n \xrightarrow{st} \eta$, kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} P(|\eta_n| \geqslant K) \leqslant P(|\eta_n| \geqslant K/2) \to 0, \quad \text{ha } K \to +\infty.$$

Ezért $\limsup_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(|\eta_n| \geqslant K) = 0$, és így következik (2.2.17).

Most azt mutatjuk meg, hogy $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{st} a\xi + b\eta$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Azt kell belátni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$P(|a\xi_n + b\eta_n - a\xi - b\eta| \geqslant \varepsilon) \to 0.$$

Feltehető, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$. Ugyanis, ha a vagy b nulla, akkor a kiindulási feltételből azonnal következik az állítás. Ekkor

$$\begin{aligned} P(|a\xi_n + b\eta_n - a\xi - b\eta| \geqslant \varepsilon) &\leqslant P\Big(\{|a\xi_n - a\xi| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \{|b\eta_n - b\eta| \geqslant \varepsilon/2\}\Big) \\ &\leqslant P(|a\xi_n - a\xi| \geqslant \varepsilon/2) + P(|b\eta_n - b\eta| \geqslant \varepsilon/2) \\ &= P\big(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon/(2|a|)\big) + P\big(|\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon/(2|b|)\big) \to 0, \end{aligned}$$

mert $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$ és $\eta_n \xrightarrow{st} \eta$. □

2.2.39. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikusan korlátos, azaz

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} P(|\xi_n| > R) = 0,$$

valamint $\eta_n \xrightarrow{st} 0$, akkor $\xi_n\eta_n \xrightarrow{st} 0$.

Megoldás. Azt kell bizonyítani, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon) = 0.$$

Legyen $K > 0$. Ekkor

$$P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon) = P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon, |\eta_n| > K) + P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon, |\eta_n| \leqslant K).$$

Itt

$$P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon, |\eta_n| > K) \leqslant P(|\eta_n| > K),$$

és

$$P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon, |\eta_n| \leqslant K) \leqslant P\left(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{K}\right),$$

ugyanis

$$\Big\{|\xi_n\eta_n| > \varepsilon, |\eta_n| \leqslant K\Big\} \subseteq \Big\{|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{K}\Big\}.$$

Így

$$P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon) \leqslant P(|\eta_n| > K) + P\Big(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{K}\Big) \leqslant P(|\eta_n| > K) + \sup_{n\in\mathbb{N}} P\Big(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{K}\Big).$$

Ezért minden $K > 0$ esetén

$$\limsup_{n\to\infty} P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon) \leqslant \limsup_{n\to\infty} P(|\eta_n| > K) + \sup_{n\in\mathbb{N}} P\Big(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{K}\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} P\Big(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{K}\Big),$$

hiszen $\eta_n \overset{st}{\to} 0$. Vegyük mindkét oldal $\limsup$-ját, amint $K \to 0$, ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon) \leqslant \limsup_{K\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} P\Big(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{K}\Big) = 0,$$

ahol az utolsó egyenlőség a feltétel miatt igaz. Így létezik a $\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n\eta_n| > \varepsilon)$ határérték és 0-val egyenlő. □

2.2.40. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{st} 0$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $P(0 \leqslant \xi_{n+1} \leqslant \xi_n) = 1$, akkor $P(\xi_n \to 0) = 1$.

Első megoldás. Megmutatjuk, hogy

$$P\Big(\{\omega \in \Omega : 0 \leqslant \xi_m(\omega) \leqslant \xi_n(\omega) \ \ \forall\, m, n \in \mathbb{N}, \ \ m \geqslant n\}\Big) = 1.$$

Ehhez elegendő megmutatni, hogy bármilyen $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$ esetén

$$P\Big(\{\omega \in \Omega : 0 \leqslant \xi_m(\omega) \leqslant \xi_n(\omega)\}\Big) = 1.$$

Ugyanis az $\{m \geqslant n, \ m, n \in \mathbb{N}\}$ rendszer megszámlálhatóan végtelen és, ha A_n, $n \in \mathbb{N}$ események, melyekre $P(A_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. (Valóban,

$$0 = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(\overline{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.)$$

Bizonyítási módszerünk a teljes indukció. Ha $m = n+1$, akkor a feltétel miatt igaz a dolog. Tegyük fel, hogy m-re igaz a dolog $(m \geqslant n)$, és bizonyítsuk be, hogy $m+1$-re is igaz. Ekkor

$$P(0 \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi_n) = P(0 \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi_n, \xi_n < \xi_m) + P(0 \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi_n, \xi_m \leqslant \xi_n) =: I + II.$$

Az indukciós feltevés miatt $P(0 \leqslant \xi_m \leqslant \xi_n) = 1$, és így $I = 0$. Ezért

$$P(0 \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi_n) = P(0 \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi_n, \xi_{m+1} \leqslant \xi_m \leqslant \xi_n) \geqslant P(0 \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi_m \leqslant \xi_n) = 1,$$

és így $P(0 \leqslant \xi_{m+1} \leqslant \xi_n) = 1$.

Így $\xi_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$ monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat P-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, ezért

$$P(\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\}) = 1.$$

Mivel $\xi_n \xrightarrow{st} 0$, kapjuk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n| > \varepsilon) = 0$. Legyen a továbbiakban $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned}
&P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ és } \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) > \varepsilon\big\}\Big) \\
&\quad = P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ és } \inf_{n\in\mathbb{N}} \xi_n(\omega) > \varepsilon\big\}\Big) \\
&\quad \leqslant P\big(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) > \varepsilon,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}\big) = P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\xi_n(\omega) > \varepsilon\}\big\}\Big) \\
&\quad \leqslant P(\xi_n > \varepsilon) \leqslant P(|\xi_n| > \varepsilon), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Így bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ és } \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) > \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Mivel

$$\big\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ és } \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) > 0\big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ és } \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) > 1/k\big\},$$

kapjuk, hogy

$$P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ és } \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) > 0\big\}\Big) = 0.$$

Mivel $P(\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\}) = 1$ és $P(\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \geqslant 0, \forall\, n \in \mathbb{N}\}) = 1$, kapjuk, hogy

$$P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \text{ és } \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = 0\big\}\Big) = 1.$$

Második megoldás. (Iglói Endre megoldása) Felhasználva, hogy megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, kapjuk, hogy

$$P(0 \leqslant \cdots \leqslant \xi_{n+1} \leqslant \xi_n \leqslant \cdots \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_1) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{0 \leqslant \xi_{n+1} \leqslant \xi_n\}\right) = 1.$$

Így $\xi_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$ monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat P-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén, és ezért

$$P\Big(\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\}\Big) = 1.$$

Mivel $\xi_n \stackrel{st}{\to} 0$, a Riesz-féle kiválasztási tétel szerint létezik olyan $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat, hogy $P(\lim_{k\to\infty} \xi_{n_k} = 0) = 1$. Felhasználva, hogy $P(\exists \lim_{n\to\infty} \xi_n) = 1$, és azt, hogy egy konvergens (valós értékű) sorozat határértéke egyértelmű, kapjuk, hogy $P(\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0) = 1$. $\square$

2.2.41. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{st} \eta$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $P(\xi_n \leqslant \eta_n) = 1$, akkor $P(\xi \leqslant \eta) = 1$.

2.2.42. Feladat. Legyen ξ és η valószínűségi változók esetén

$$d(\xi,\eta) := \mathbb{E}\Big(\frac{|\xi-\eta|}{1+|\xi-\eta|}\Big).$$

Bizonyítandók a következő állítások:

(a) d egy metrikát határoz meg a P-majdnem mindenütt egyenlő valószínűségi változók ekvivalencia-osztályain.

(b) $\xi_n \xrightarrow{st} \xi$ akkor és csak akkor, ha $d(\xi_n, \xi) \to 0$.

(Ezen állítás mondanivalója, hogy metrizáljuk a sztochasztikus konvergenciát.)

Megoldás. (a): Sorban leellenőrizzük a metrika definíciójában szereplő tulajdonságokat. Ekkor d nemnegatív, és

$$d(\xi,\eta) = 0 \iff \mathbb{E}\left(\frac{|\xi-\eta|}{1+|\xi-\eta|}\right) = 0 \iff P(\xi = \eta) = 1.$$

Nyilvánvalóan fennáll az is, hogy $d(\xi,\eta) = d(\eta,\xi)$. Azt kell még igazolnunk, hogy

$$d(\xi,\eta) \leqslant d(\xi,\kappa) + d(\kappa,\eta).$$

Vizsgáljuk meg először d definíciójában, az integrandusban szereplő függvényt, nevezetesen az

$$f(\lambda) := \frac{\lambda}{1+\lambda}, \qquad \lambda \geqslant 0 \qquad \text{függvényt.}$$

Ekkor

$$f'(\lambda) = \frac{1+\lambda-\lambda}{(1+\lambda)^2} = \frac{1}{(1+\lambda)^2} > 0,$$

és így f szigorúan monoton növekvő. Továbbá megmutatjuk, hogy

$$f(\lambda_1+\lambda_2) = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2} \leqslant \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} = f(\lambda_1) + f(\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0.$$

Ekvivalens átalakítások után a bizonyítandó egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$0 \leqslant 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2),$$

ez pedig igaz, mert $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$.

Felhasználva az f függvény tulajdonságait, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d(\xi, \eta) = \int_\Omega \frac{|\xi - \eta|}{1 + |\xi - \eta|} \, \mathsf{d}P &\leqslant \int_\Omega \frac{|\xi - \kappa| + |\kappa - \eta|}{1 + |\xi - \kappa| + |\kappa - \eta|} \, \mathsf{d}P \\ &\leqslant \int_\Omega \frac{|\xi - \kappa|}{1 + |\xi - \kappa|} \, \mathsf{d}P + \int_\Omega \frac{|\kappa - \eta|}{1 + |\kappa - \eta|} \, \mathsf{d}P = d(\xi, \kappa) + d(\kappa, \eta). \end{aligned}$$

(b): Tegyük fel először, hogy $\xi_n \stackrel{st}{\to} \xi$. Legyen minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$A_n(\varepsilon) := \big\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\big\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} d(\xi_n, \xi) &= \int_\Omega \frac{|\xi_n - \xi|}{1 + |\xi_n - \xi|} \, \mathsf{d}P = \int_{A_n(\varepsilon)} \frac{|\xi_n - \xi|}{1 + |\xi_n - \xi|} \, \mathsf{d}P + \int_{\Omega \setminus A_n(\varepsilon)} \frac{|\xi_n - \xi|}{1 + |\xi_n - \xi|} \, \mathsf{d}P \\ &\leqslant 1 \cdot P(A_n(\varepsilon)) + \int_{\Omega \setminus A_n(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \, \mathsf{d}P = P(A_n(\varepsilon)) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} P(\Omega \setminus A_n(\varepsilon)) \\ &= P(A_n(\varepsilon)) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}(1 - P(A_n(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Mivel $\xi_n \stackrel{st}{\to} \xi$, kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0$ bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén. Ezért

$$\limsup_{n\to\infty} d(\xi_n, \xi) \leqslant 0 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Véve mindkét oldal $\limsup$-ját, amint $\varepsilon \downarrow 0$, kapjuk, hogy $\limsup_{n\to\infty} d(\xi_n, \xi) = 0$. Mivel $d \geqslant 0$, adódik, hogy létezik az $\lim_{n\to\infty} d(\xi_n, \xi)$ határérték és 0-val egyenlő.

Tegyük most fel, hogy $d(\xi_n, \xi) \to 0$. Ekkor

$$d(\xi_n, \xi) = \int_\Omega \frac{|\xi_n - \xi|}{1 + |\xi_n - \xi|} \, \mathsf{d}P \geqslant \int_{A_n(\varepsilon)} \frac{|\xi_n - \xi|}{1 + |\xi_n - \xi|} \, \mathsf{d}P \geqslant \int_{A_n(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \, \mathsf{d}P = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} P(A_n(\varepsilon))$$

Így

$$0 = \limsup_{n\to\infty} d(\xi_n, \xi) \geqslant \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \limsup_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon)) \geqslant 0,$$

és ezért

$$\limsup_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0.$$

Mivel $P(A_n(\varepsilon)) \geqslant 0$, kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0$, azaz $\xi_n \stackrel{st}{\to} \xi$. $\square$

2.3. Borel–Cantelli-lemma és a nagy számok erős törvénye

2.3.1. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, melyekre

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad P(\xi_n = n^2) = P(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{2n^2}.$$

Bizonyítandó, hogy ekkor $P(\xi_n \to 0) = 1$, $\mathbb{E}\xi_n \to 0$, de $\xi_n \overset{L_1}{\not\to} 0$.

Megoldás. Ekkor

$$\mathbb{E}\xi_n = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2 \frac{1}{2n^2} + (-n^2)\frac{1}{2n^2} = 0 \to 0,$$

valamint

$$\mathbb{E}|\xi_n - 0| = \mathbb{E}|\xi_n| = |0| \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2 \frac{1}{2n^2} + |-n^2|\frac{1}{2n^2} = 1 \not\to 0,$$

és így $\xi_n \overset{L_1}{\not\to} 0$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$A_n := \{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \neq 0\}.$$

Ekkor $P(A_n) = 1/n^2$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Ezért a Borel–Cantelli-lemma miatt $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$, azaz

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\Big) = 1.$$

Részletesebben kiírva

$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \exists\, n(\omega) \in \mathbb{N} : \quad \forall\, k \geqslant n(\omega) : \xi_k(\omega) = 0\Big\}\Big) = 1.$$

Mivel

$$\Big\{\omega \in \Omega : \exists\, n(\omega) \in \mathbb{N} : \quad \forall\, k \geqslant n(\omega) : \xi_k(\omega) = 0\Big\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \xi_k(\omega) \to 0\},$$

kapjuk, hogy $P(\xi_k \to 0) = 1$.

Vegyük észre, hogy nem kellett feltennünk, hogy ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ függetlenek. □

2.3.2. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független valószínűségi változók, akkor létezik olyan $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \xi_n = c\Big) = 1,$$

azaz $\limsup_{n\to\infty} \xi_n$ konstans P-m.m.

Megoldás. Azt, hogy $\limsup_{n\to\infty}\xi_n$ mérhető mértékelméletből tanultuk. Tekintsük az $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_n)$, $n\in\mathbb{N}$ σ-algebra családhoz tartozó farok-σ-algebrát:

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots).$$

Ekkor bármilyen $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ esetén

$$\Big\{\omega\in\Omega : \limsup_{n\to\infty}\xi_n(\omega) = c\Big\} \in \mathcal{T},$$

hiszen minden $m\in\mathbb{N}$ esetén

$$\Big\{\omega\in\Omega : \limsup_{n\to\infty}\xi_n(\omega) = c\Big\} = \Big\{\omega\in\Omega : \limsup_{n\to\infty,\, n\geqslant m}\xi_n(\omega) = c\Big\},$$

és

$$\Big\{\omega\in\Omega : \limsup_{n\to\infty,\, n\geqslant m}\xi_n(\omega) = c\Big\} \in \sigma(\xi_m, \xi_{m+1}, \ldots).$$

Az is hasonlóan jön ki, hogy bármilyen $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\Big\{\omega\in\Omega : \limsup_{n\to\infty}\xi_n(\omega) < x\Big\} \in \mathcal{T}.$$

A Kolmogorov 0-1 törvény alapján

$$P(\limsup_{n\to\infty}\xi_n < x) \in \{0,1\}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Ekkor az $x\in\mathbb{R} \mapsto P(\limsup_{n\to\infty}\xi_n < x)$ leképezés monoton növekvő, balról folytonos, hiszen egy eloszlásfüggvény monoton növekvő és balról folytonos.

Így létezik olyan $c\in[-\infty,+\infty]$:

$$P(\limsup_{n\to\infty}\xi_n < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x\leqslant c, \\ 1 & \text{ha} \quad x > c. \end{cases}$$

Ezért

$$\begin{aligned} P(\limsup_{n\to\infty}\xi_n = c) &= P(\limsup_{n\to\infty}\xi_n \leqslant c) - P(\limsup_{n\to\infty}\xi_n < c) = P(\limsup_{n\to\infty}\xi_n \leqslant c) \\ &= F_{\limsup_{n\to\infty}\xi_n}(c+0) = 1. \end{aligned}$$

□

2.3.3. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n\in\mathbb{N}\}$ független valószínűségi változók, és $\{b_n : n\in\mathbb{N}\}$ olyan pozitív valós számok, hogy $b_n \uparrow +\infty$. Bizonyítandó, hogy létezik olyan $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{b_n} = c\Big) = 1.$$

2.3.4. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, hogy $P(\xi_n = 1) = p$, $P(\xi_n = -1) = 1 - p$, $n \in \mathbb{N}$, ahol $p \neq 1/2$. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Bizonyítandó, hogy $P(\{S_n = 0 \text{ véges sok } n\text{-re}\}) = 1$.

Megoldás. Mivel az origóba csak páros számú lépésben tudunk visszatérni, vezessük be az $A_n := \{\omega \in \Omega : S_{2n}(\omega) = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$ jelölést. Ha megmutatjuk, hogy $\sum_{n=1}^\infty P(A_n) < +\infty$, akkor a Borel–Cantelli-lemma alapján következni fog, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy azon ω-k halmazának a valószínűsége, melyek végtelen sok A_n-ben benne vannak 0, azaz azon ω-k halmazának a valószínűsége, melyek csak véges sok A_n-ben vannak benne 1, s pont ezt kell bizonyítani.

Ekkor
$$P(A_n) = P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$
A $\sum_{n=1}^\infty P(A_n)$ sor konvergenciáját a D'Alambert-féle hányados kritérium segítségével ellenőrizzük le. Ekkor
$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} p^{n+1}(1-p)^{n+1}}{\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n! n!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} p(1-p) \\
&= p(1-p) \limsup_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 6n + 2}{n^2 + 2n + 1} = 4p(1-p).
\end{aligned}$$
Mivel $p \in [0, 1]$, kapjuk, hogy
$$p(1-p) \leqslant \left(\frac{p + 1 - p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $p = 1/2$. Mivel $p \neq 1/2$ esetünkben, kapjuk, hogy $p(1-p) < 1/4$. Azaz a kérdéses sor konvergens. Így adódik az állítás. □

2.3.5. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan független valószínűségi változók, hogy $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Bizonyítandó, hogy $P(\{S_n = 0 \text{ végtelen sok } n\text{-re}\}) = 1$.

Megoldás. Felidézzük az **iterált logaritmus tétel** állítását: ha ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $0 < \sigma^2 := \mathbb{E}\xi_1^2 < +\infty$, akkor
$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log(\log n)}} = 1\Big) = 1,$$
$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 n \log(\log n)}} = -1\Big) = 1.$$

Mivel $\sqrt{n \log\log n} \to +\infty$, kapjuk, hogy
$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\Big) = 1,$$
$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty\Big) = 1.$$

Ezért $+\infty$ és $-\infty$ 1 valószínűséggel torlódási pontja az $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ sorozatnak. Mivel 0 e két torlódási pont között van és S_n egyesével lépeget, megkaptuk az állítást. $\square$

2.3.6. Feladat. Legyen ξ egy valószínűségi változó. Bizonyítandó, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$,

(b) bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) < +\infty$,

(c) létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) < +\infty$.

Megoldás. A megoldás során felhasználjuk azt a (tanult) dolgot, hogy ha $\eta \geqslant 0$ valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{E}\eta = \int_0^{+\infty} (1 - F_\eta(x)) \, \mathsf{d}x = \int_0^{+\infty} P(\eta \geqslant x) \, \mathsf{d}x,$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldalon álló mennyiség létezik és véges, akkor a másik is az, és a kettő egyenlő. (Ennek rövid indoklása a következő. A Fubini-tétel alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} P(\eta \geqslant x) \, \mathsf{d}x &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\mathbb{1}_{[x,+\infty)}(\eta) \, \mathsf{d}x = \int_0^{+\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{[x,+\infty)}(\eta(\omega)) \, \mathsf{d}P(\omega) \, \mathsf{d}x \\ &= \int_\Omega \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[x,+\infty)}(\eta(\omega)) \, \mathsf{d}x \, \mathsf{d}P(\omega) = \int_\Omega \eta(\omega) \, \mathsf{d}P(\omega) = \mathbb{E}\eta.)\end{aligned}$$

Így bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\int_0^{+\infty} P(|\xi| \geqslant t\varepsilon) \, \mathsf{d}t = \int_0^{+\infty} P\left(\frac{|\xi|}{\varepsilon} \geqslant t\right) \, \mathsf{d}t = \mathbb{E}\frac{|\xi|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}|\xi|,$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldalon álló mennyiség létezik és véges, akkor a másik is az, és a kettő egyenlő.

$(a) \Longrightarrow (b)$: Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor felhasználva, hogy a $t \in [0, +\infty) \mapsto P(|\xi| \geqslant t\varepsilon)$ függvény monoton csökkenő, és, hogy $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) \, \mathsf{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} P(|\xi| \geqslant t\varepsilon) \, \mathsf{d}t &= \int_0^{+\infty} P(|\xi| \geqslant t\varepsilon) \, \mathsf{d}t \\ &= \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

$(b) \Longrightarrow (c)$: Triviális.

$(c) \Longrightarrow (a)$: Tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) < +\infty$. Tekintsük a következő becslést:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} P(|\xi| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} P(|\xi| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} P(|\xi| \geqslant (n-1)\varepsilon)\,\mathsf{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geqslant (n-1)\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon).\end{aligned}$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| \geqslant n\varepsilon) < +\infty$, és $P(A) \leqslant 1$ tetszőleges A eseményre, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}|\xi| = \int_0^{+\infty} P(|\xi| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t < +\infty,$$

és így $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$. □

2.3.7. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy ξ_1-nek létezik a várható értéke és az $+\infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\Big) = 1.$$

Első megoldás. (Medvegyev [6], 538. old. alapján) A $\xi_1^+ := \max\{\xi_1, 0\}$, $\xi_1^- := -\min\{\xi_1, 0\}$ jelölésekkel élve, mivel ξ_1-nek létezik a várható értéke, az $\mathbb{E}\xi_1^+$ és $\mathbb{E}\xi_1^-$ várható értékek közül legalább az egyik véges. És mivel $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^+ - \mathbb{E}\xi_1^-$, $\mathbb{E}\xi_1^+ \geqslant 0$, $\mathbb{E}\xi_1^- \geqslant 0$ és $\mathbb{E}\xi_1 = +\infty$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}\xi_1^+ = +\infty$ és $\mathbb{E}\xi_1^- < +\infty$ kell legyen.

Tegyük fel először, hogy $P(\xi_1 \geqslant 0) = 1$. Legyen minden $K \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n^{(K)} := \min\{\xi_n, K\}$. Ekkor $\{\xi_n^{(K)} : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $\mathbb{E}|\xi_1^{(K)}| \leqslant K < +\infty$, azaz véges a várható érték. Így alkalmazható a nagy számok erős törvénye, ami szerint

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^{(K)}}{n} = \mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big) = 1.$$

Mivel $\xi_n^{(K)} \leqslant \xi_n$, kapjuk, hogy

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^{(K)}}{n} = \mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big\} \subseteq \Big\{\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^{(K)}}{n} = \mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big\} \subseteq \Big\{\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \geqslant \mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big\}.$$

És így

$$1 = P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^{(K)}}{n} = \mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big) \leqslant P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \geqslant \mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big), \qquad \forall\, K \in \mathbb{N},$$

emiatt pedig

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \geqslant \mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big) = 1, \qquad \forall\, K \in \mathbb{N}.$$

A monoton konvergencia tételt felhasználva megmutatjuk, hogy $\lim_{K\to\infty} = \mathbb{E}\xi_1^{(K)} = +\infty$. Mivel minden $K \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}|\xi_1^{(K)}| \leqslant K < +\infty$, $\xi_1^{(K)} \geqslant 0$, $\mathbb{E}(0) = 0 > -\infty$, és $\xi_1^{(K)}(\omega) \uparrow \xi_1(\omega)$ minden $\omega \in \Omega$ esetén, adódik, hogy $\mathbb{E}\xi_1^{(K)} \uparrow \mathbb{E}\xi_1 = +\infty$.

Ezért

$$\Big\{\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n\xi_k}{n}=+\infty\Big\}=\bigcap_{K=1}^{+\infty}\Big\{\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n\xi_k}{n}\geqslant\mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big\},$$

és így a valószínűség folytonossága miatt

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n\xi_k}{n}=+\infty\Big)=\lim_{K\to\infty}P\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n\xi_k}{n}\geqslant\mathbb{E}\xi_1^{(K)}\Big)=\lim_{K\to\infty}1=1.$$

Mivel $\liminf\leqslant\limsup$, kapjuk, hogy

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=+\infty\Big)=1.$$

Legyen most ξ_1 tetszőleges (a feladat feltételeit kielégítő) valószínűségi változó. Ekkor

$$\frac{S_n}{n}=\frac{\xi_1^++\cdots+\xi_n^+}{n}-\frac{\xi_1^-+\cdots+\xi_n^-}{n}.$$

Mivel $\mathbb{E}\xi_1^+=+\infty$, $\xi_1^+\geqslant0$, a feladat megoldásának előző része miatt

$$P\Big(\frac{\xi_1^++\cdots+\xi_n^+}{n}\to+\infty\Big)=1,$$

illetve, mivel $\mathbb{E}\xi_1^-<+\infty$, a nagy számok erős törvénye szerint

$$P\Big(\frac{\xi_1^-+\cdots+\xi_n^-}{n}\to\mathbb{E}\xi_1^-\Big)=1.$$

Felhasználva, hogy két 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, és $\mathbb{E}\xi_1^-<+\infty$, kapjuk, hogy

$$P\left(\frac{S_n}{n}\to+\infty\right)=1.$$

Második megoldás. Ez a megoldás sokban hasonlít az elsőhöz. Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor $P(\xi_1\geqslant0)=1$, azaz nemnegatív, azonos eloszlású valószínűségi változókat tekintünk. Minden $K\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$\eta_{n,K}:=\xi_n\mathbb{1}_{\{\xi_n\leqslant K\}},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Ekkor mivel $\eta_{n,K}\leqslant K$, $n\in\mathbb{N}$, azaz az $\eta_{n,K}$-k korlátosak, kapjuk, hogy az $\eta_{n,K}$-k integrálhatóak és mivel függetlenek és azonos eloszlásúak is, a nagy számok erős törvénye alapján

$$P\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\eta_{k,K}\to\mathbb{E}\eta_{1,K}\Big)=1,\qquad K\in\mathbb{N}.$$

Legyen minden $K\in\mathbb{N}$ esetén

$$A_K:=\Big\{\omega\in\Omega:\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\eta_{k,K}\nrightarrow\mathbb{E}\eta_{1,K}\Big\},$$

ekkor

$$P\Big(\bigcup_{K=1}^{+\infty} A_K\Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P\Big(\bigcap_{K=1}^{+\infty} (\Omega \setminus A_K)\Big) = 1.$$

Legyen $\omega \in \bigcap_{K=1}^{+\infty} (\Omega \setminus A_K)$. Ekkor minden $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_{k,K}(\omega) \to \mathbb{E}\eta_{1,K}.$$

Mivel $P(\xi_n \geqslant 0) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy minden $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_{k,K}(\omega) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Egészen pontosan azon $\omega \in \Omega$-k halmazának is 1 a valószínűsége, melyekre $\xi_n(\omega) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, és melyek benne vannak $\bigcap_{K=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_K)$-ban.) Ezért minden $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}\eta_{1,K} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_{k,K}(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_{k,K}(\omega) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n}.$$

Az első megoldás alapján $\lim_{K\to\infty} \mathbb{E}\eta_{1,K} = \mathbb{E}\xi_1 = +\infty$, és így

$$+\infty = \lim_{K\to\infty} \mathbb{E}\eta_{1,K} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n}.$$

Így $\lim_{n\to+\infty} S_n(\omega)/n = +\infty$. Mivel $\omega \in \Omega$ egy 1-valószínűségű halmazból került ki, kapjuk a feladat állítását. □

2.3.8. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. Bizonyítandó, hogy ekkor

(a) $P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0\Big) = 1$,

(b) $P\big(\{|\xi_n| > n \text{ véges sok } n\text{-re}\}\big) = 1$.

Megoldás. (a): A nagy számok erős törvénye szerint

$$P\left(\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}\xi_1\right) = 1.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{\xi_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1},$$

azt, hogy $(n-1)/n \to 1$, és azt, hogy 3 darab 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, kapjuk, hogy

$$P\left(\frac{\xi_n}{n} \to \mathbb{E}\xi_1 - 1 \cdot \mathbb{E}\xi_1 = 0\right) = 1.$$

(b): Ekkor

$$\Big\{|\xi_n| > n \ \text{ véges sok } \ n\text{-re}\Big\} = \Big\{\frac{|\xi_n|}{n} > 1 \ \text{ véges sok } \ n\text{-re}\Big\}.$$

Az (a) rész alapján P-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén létezik olyan $N(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geqslant N(\omega)$ esetén $|\xi_n(\omega)|/n \leqslant 1$, így ezek az $\omega \in \Omega$-k benne vannak az $\{|\xi_n| > n$ véges sok n-re$\}$ halmazban, és ezért ez utóbbi esemény valószínűsége is 1. □

2.3.9. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty$ bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén,

(b) $P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1$,

(c) $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1$.

(d) Igaz-e, hogy $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1$?

Megoldás. (a): Ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geqslant n\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geqslant n\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} P(|\xi_1| \geqslant n\varepsilon)\,\mathsf{d}t \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} P(|\xi_1| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t = \int_1^{+\infty} P(|\xi_1| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t.\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Felhasználva, hogy

$$\int_0^{+\infty} P(|\xi_1| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}|\xi_1|,$$

amennyiben az egyik oldalon álló mennyiség létezik és véges, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty \quad\Longrightarrow\quad \int_0^{+\infty} P(|\xi_1| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t = +\infty.$$

Így, mivel $\int_0^1 P(|\xi_1| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t \leqslant \int_0^1 1\,\mathsf{d}t = 1$, kapjuk, hogy

$$\int_0^{+\infty} P(|\xi_1| \geqslant t\varepsilon)\,\mathsf{d}t = +\infty.$$

Felhasználva (2.3.18)-at, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty.$$

Megjegyezzük, hogy a 2.3.6. Feladat $(a) \Longrightarrow (b)$ része alapján az is igazolható, hogy

$$\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,\varepsilon > 0 \ \text{ esetén } \ \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geqslant \varepsilon n) = +\infty.$$

Megjegyezzük továbbá, hogy az (a) rész állítása közvetlenül is következik a 2.3.6. Feladat $(a) \Leftrightarrow (b)$ ekvivalenciájából.

(b): Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$A_n := \left\{ \frac{|\xi_n|}{n} \geqslant \varepsilon \right\}.$$

Mivel ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ függetlenek, így az A_n, $n \in \mathbb{N}$ események is függetlenek és az **(a)** rész miatt $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$. Ezért a Borel–Cantelli-lemma alapján kapjuk, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Ha $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $k(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy $k(\omega) \geqslant n$ és $|\xi_{k(\omega)}(\omega)|/k(\omega) \geqslant \varepsilon$. Így

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|(\omega)}{n} \geqslant \varepsilon.$$

Mivel $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$, adódik, hogy

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} \geqslant \varepsilon \right) = 1, \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Mivel

$$\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty \right\} = \bigcap_{M=1}^{+\infty} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} \geqslant M \right\}, \tag{2.3.19}$$

a valószínűség folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty \right) = \lim_{M\to\infty} P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} \geqslant M \right) = \lim_{M\to\infty} 1 = 1.$$

Így kapjuk (b)-t. (Egyszerűbben is befejezhetjük e rész megoldását. Felhasználva, hogy megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, (2.3.19) alapján kapjuk, hogy $P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1$.)

(c): A (b) rész gondolatmenetét módosítva mutatjuk meg (c)-t. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_n := \left\{ \frac{|\xi_n|}{n} \geqslant \varepsilon \right\}.$$

Ekkor $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Ezért, ha $N \in \mathbb{N}$ rögzített és $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, akkor bármilyen $n \geqslant N$ esetén létezik olyan $k(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy $k(\omega) \geqslant n$ és $|\xi_{k(\omega)}|(\omega)/k(\omega) \geqslant \varepsilon$. Így

$$\sup_{n\geqslant N} \frac{|\xi_n|(\omega)}{n} \geqslant \varepsilon, \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Hasonlóan a (b) részhez, kaphatjuk, hogy bármilyen $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$P\left(\sup_{n\geqslant N} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty \right) = 1. \tag{2.3.20}$$

Felhasználjuk az alábbiakban azt az állítást, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geqslant n} x_k \Big).$$

Így

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty \Big) = P\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geqslant n} \frac{|\xi_k|}{k} \Big) = +\infty \Big),$$

és (2.3.20) miatt, felhasználva, hogy megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, kapjuk, hogy

$$P\Big(\sup_{n\geqslant N} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty, \ \ \forall\, N\in\mathbb{N} \Big) = 1.$$

Ezért

$$\begin{aligned} P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty \Big) &= P\Big(\Big\{ \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geqslant n} \frac{|\xi_k|}{k} \Big) = +\infty \Big\} \cap \Big\{ \sup_{n\geqslant N} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty, \ \ \forall\, N\in\mathbb{N} \Big\} \Big) \\ &= P\Big(\sup_{n\geqslant N} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty, \ \ \forall\, N\in\mathbb{N} \Big) = 1, \end{aligned}$$

ugyanis

$$\Big\{ \sup_{n\geqslant N} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty, \ \ \forall\, N\in\mathbb{N} \Big\} \subseteq \Big\{ \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{k\geqslant n} \frac{|\xi_k|}{k} \Big) = +\infty \Big\}.$$

A következőkben egy másik bizonyítást is adunk, s megmutatjuk azt is, hogy $(b) \iff (c)$. Azt mutatjuk meg, hogy

$$\Big\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty \Big\} = \Big\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty \Big\},$$

ebből már következik, hogy $(b) \iff (c)$.

Legyen először $\omega\in\Omega$ olyan, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n(\omega)|}{n} = +\infty.$$

Ekkor bármilyen $M\in\mathbb{N}$ esetén létezik olyan $n_M\in\mathbb{N}$, hogy $|\xi_{n_M}(\omega)|/n_M > M$. Az n_M, $M\in\mathbb{N}$ számokat úgy is megválaszthatjuk, hogy $n_{M+1} > n_M$, $M\in\mathbb{N}$, ugyanis,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n(\omega)|}{n} = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{n\geqslant n_M} \frac{|\xi_n(\omega)|}{n} = +\infty, \quad M\in\mathbb{N}.$$

Ezért létezik $\{\frac{|\xi_n(\omega)|}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$-nek olyan részsorozata, nevezetesen, $\{\frac{|\xi_{n_M}(\omega)|}{n_M},\ M\in\mathbb{N}\}$, mely $+\infty$-hez tart. És így $\limsup_{n\to\infty} \frac{|\xi_n(\omega)|}{n} = +\infty$.

Tegyük most fel, hogy $\omega\in\Omega$ olyan, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\xi_n(\omega)|}{n} = +\infty.$$

Ekkor létezik $\{\frac{|\xi_n(\omega)|}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$-nek olyan részsorozata, mely $+\infty$-hez konvergál, és így nyilván fennáll, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|\xi_n(\omega)|}{n}=+\infty.$$

Ezért, ha valamelyik szóbanforgó esemény valószínűsége 1, akkor a másiké is.

(d): Megmutatjuk, hogy nem a válasz. Belátjuk ugyanis, hogy

$$P\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{|\xi_n|}{n}=0\right)=1.$$

Mivel $\frac{|\xi_n|}{n}\geqslant 0,\ n\in\mathbb{N}$, a 2.4.2. Feladat alapján ehhez elég azt belátni, hogy bármilyen $\varepsilon>0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\frac{|\xi_n|}{n}<\varepsilon\right)=+\infty. \tag{2.3.21}$$

Mivel bármilyen $\varepsilon>0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{|\xi_n|}{n}<\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{|\xi_1|}{n}<\varepsilon\right)=1,$$

kapjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\frac{|\xi_n|}{n}<\varepsilon\right)$ sor nem konvergens, s mivel nemnegatív tagú, adódik (2.3.21). Érdemes összevetni a (d) rész eredményét a 2.3.8. Feladat (a) részével. □

2.3.10. Feladat. (Baum–Katz-tétel) Legyenek $X_n,\ n\in\mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $S_n:=X_1+\cdots+X_n,\ n\in\mathbb{N}$. Legyenek továbbá a és q olyan valós számok, hogy $a>1/2$ és $q\geqslant 1/a$. Mutassuk meg, hogy ha $q<1$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{qa-2}P(|S_n|\geqslant\varepsilon n^a)<+\infty,\quad\forall\,\varepsilon>0, \tag{2.3.22}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbb{E}|X_1|^q<+\infty$. Mutassuk meg továbbá, hogy $q\geqslant 1$ esetén (2.3.22) akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbb{E}|X_1|^q<+\infty$ és $\mathbb{E}X_1=0$.

2.3.11. Feladat. Legyenek $X_n,\ n=0,1,2,\ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $P(X_1\geqslant 1)=1$. Tekintsük az alábbi, ,,véletlen együtthatós", 0-középpontú, valós hatványsort:

$$\sum_{n=0}^{\infty}X_nx^n,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Jelölje R ezen hatványsor konvergenciasugarát. Mutassuk meg, hogy R 1-valószínűséggel konstans, és R 0 vagy 1 lehet (az X_k-k közös eloszlásától függően). Mutassuk meg továbbá, hogy

$$P(R=0)=1\quad\Longleftrightarrow\quad\mathbb{E}(\ln|X_1|)=+\infty.$$

Megoldás. A fenti hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = +\infty, \\ +\infty & \text{ha} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = 0, \\ \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|}} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg az $\ln(\sqrt[n]{|X_n|})$ sorozat viselkedését. Megjegyezzük, hogy $\ln(\sqrt[n]{|X_n|})$ értelmezhető 1-valószínűséggel, hiszen $P(X_1 \geqslant 1) = 1$ miatt bármilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $P(\sqrt[n]{|X_n|} \geqslant 1) = 1$. És így azt is látjuk, hogy $P(\ln(\sqrt[n]{|X_n|}) \geqslant 0) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ekkor $n \geqslant 1$ esetén

$$\ln(\sqrt[n]{|X_n|}) = \frac{1}{n} \ln |X_n| = \frac{1}{n}(S_n - S_{n-1}),$$

ahol $S_n := \sum_{k=1}^n \ln |X_k|$, $n \geqslant 1$, és $S_0 := 0$.

Abban az esetben, ha $\mathbb{E}|\ln |X_1|| = \mathbb{E} \ln |X_1| < +\infty$, felhasználva a 2.3.8. Feladatot, kapjuk, hogy

$$P\big(\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{|X_n|} = 0\big) = 1.$$

Abban az esetben, ha $\mathbb{E}|\ln |X_1|| = \mathbb{E} \ln |X_1| = +\infty$, felhasználva a 2.3.9. Feladatot, kapjuk, hogy

$$P\big(\limsup_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{|X_n|} = +\infty\big) = 1.$$

Ezért

$$1 = \begin{cases} P\big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = 1\big) & \text{ha} \quad \mathbb{E} \ln |X_1| < +\infty, \\ P\big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = +\infty\big) & \text{ha} \quad \mathbb{E} \ln |X_1| = +\infty. \end{cases}$$

Mivel

$$P\big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = 1\big) \leqslant P\big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = 1\big),$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(R = 1) = 1 \qquad & \text{ha} \quad \mathbb{E} \ln |X_1| < +\infty, \\ P(R = 0) = 1 \qquad & \text{ha} \quad \mathbb{E} \ln |X_1| = +\infty. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy $P(R = 0) = 1 \iff \mathbb{E} \ln |X_1| = +\infty$, azt kell még belátni, hogy ha $P(R = 0) = 1$, akkor $\mathbb{E} \ln |X_1| = +\infty$. Ha $P(R = 0) = 1$, akkor R értelmezése miatt $P\big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = +\infty\big) = 1$. Azonban, ha $\mathbb{E} \ln |X_1| < +\infty$ lenne, akkor $P(R = 1) = 1$ lenne, azaz $P\big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|X_n|} = 1\big) = 1$, ami ellentmondás.

Ha $R = 0$, akkor a hatványsor csak $x = 0$-ban konvergens. Ha $R = 1$, akkor $\{x \in \mathbb{R}, |x| < 1\}$ része a hatványsor konvergencia tartományának. Ekkor az $\{x \in \mathbb{R}, |x| = 1\} = \{-1, 1\}$ pontokban kérdéses a konvergencia. Az $\{x \in \mathbb{R}, |x| > 1\}$ pontokban divergens a hatványsor. □

2.3.12. Feladat. Legyenek X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ független, az $[1, 2]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Tekintsük az alábbi ,,véletlen együtthatós" 0-középpontú, valós hatványsort:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mutassuk meg, hogy ezen hatványsor konvergenciasugara 1-valószínűséggel 1.

Megoldás. Az előző feladat alapján dolgozunk. Mivel $P(X_1 \geqslant 1) = 1$, azt kell csak ellenőriznünk, hogy $\mathbb{E} \ln |X_1| < +\infty$. Ekkor

$$\mathbb{E} \ln |X_1| = \int_1^2 \ln x \, \mathsf{d}x < +\infty,$$

így kapjuk a dolgot. □

2.3.13. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right)^{1/n} = \frac{1}{e}\right) = 1.$$

Megoldás. Mivel $\log$ folytonos függvény, rögzített $\omega \in \Omega$ esetén

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right)^{1/n} (\omega) \to \frac{1}{e} \quad \Longleftrightarrow \quad \log \left(\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right)^{1/n} (\omega) \to -1.$$

(Megjegyezzük, hogy az előző számolás során 1 valószínűséggel tényleg vehetjük a logaritmust, hiszen

$$P\Big(\exists\, n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \xi_k = 0\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\prod_{k=1}^{n} \xi_k = 0\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n P(\xi_1 = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 0 = 0.)$$

Ekkor

$$\log \left(\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right)^{1/n} = \frac{S_n}{n},$$

ahol $S_n := \log \xi_1 + \cdots + \log \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Mivel $\{\log \xi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók rendszere, a nagy számok erős törvénye miatt következik az állítás, ha azt belátjuk, hogy $\mathbb{E} \log \xi = -1$, ahol ξ a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

Ekkor

$$\mathbb{E} \log \xi = \int_0^1 (\log x) \cdot 1 \, \mathsf{d}x = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{x} \, \mathsf{d}x = 0 - \lim_{x \downarrow 0} (x \log x) - 1 = -1,$$

hiszen

$$\lim_{x\downarrow 0}(x\log x) = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\downarrow 0}(-x) = 0.$$

□

2.3.14. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 g(\sqrt[n]{x_1\cdots x_n})\,\mathsf{d}x_1\ldots\mathsf{d}x_n = g\left(\frac{1}{e}\right).$$

Megoldás. A baloldalon szereplő integrált felírjuk valamely valószínűségi változó várható értékeként. Emlékezzünk vissza a következőkre, abszolút folytonos esetben:

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_\xi(x)\,\mathsf{d}x,$$

$$\mathbb{E}g(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,\ldots,x_n)f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathsf{d}x_1\ldots\mathsf{d}x_n.$$

Ezek alapján

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 g(\sqrt[n]{x_1\cdots x_n})\,\mathsf{d}x_1\ldots\mathsf{d}x_n = \mathbb{E}g(\sqrt[n]{\xi_1\cdots\xi_n}),$$

ahol $\xi_1,\ldots,\xi_n$ független $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók, ugyanis ekkor

$$f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{\xi_1}(x_1)\cdots f_{\xi_n}(x_n), \qquad x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}.$$

A 2.3.13. Feladat nyomán

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\xi_1\cdots\xi_n} = 1/e\Big) = 1.$$

Mivel g folytonos függvény, kapjuk, hogy

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} g(\sqrt[n]{\xi_1\cdots\xi_n}) = g(1/e)\Big) = 1.$$

Felhasználva, hogy kompakt halmazon folytonos függvény korlátos, kapjuk, hogy létezik olyan $K>0$ konstans, hogy

$$\Big|g(\sqrt[n]{\xi_1\cdots\xi_n})\Big| \leqslant K, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Ezért alkalmazható a dominált konvergencia tétel:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}g(\sqrt[n]{\xi_1\cdots\xi_n}) = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} g(\sqrt[n]{\xi_1\cdots\xi_n})\Big) = \mathbb{E}g(1/e) = g(1/e).$$

□

2.3.15. Feladat. Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}\,\mathsf{d}x_1\ldots\mathsf{d}x_n = \frac{2}{3}.$$

Megoldás. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Ekkor

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n} \, \mathsf{d}x_1 \dots \mathsf{d}x_n = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i} \right).$$

Mivel $\mathbb{E}\xi_1 = 1/2$ és $\mathbb{E}\xi_1^2 = \int_0^1 x^2 \, \mathsf{d}x = 1/3$, a nagy számok erős törvénye alapján kapjuk, hogy P-majdnem minden $\omega \in \Omega$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2(\omega)}{\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i^2(\omega)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)} = \frac{\mathbb{E}\xi_1^2}{\mathbb{E}\xi_1} = \frac{2}{3}.$$

(Megjegyezzük, hogy azon $\omega \in \Omega$-k halmazának a valószínűsége, ahol $\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) = 0$ nulla, így az előző számolás 1-valószínűséggel korrekt.) Mivel $P(\xi_i^2 \leqslant \xi_i) = 1, i = 1, \dots, n$, kapjuk, hogy

$$P\Big(0 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i} \leqslant 1\Big) = 1.$$

Így a dominált konvergencia tétel szerint,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i} \right) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i} \right) = \mathbb{E}(2/3) = 2/3.$$

□

2.3.16. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) - f\left(\frac{1}{2} \right) \right] \mathsf{d}x_1 \cdots \mathsf{d}x_n = \frac{1}{24} f''\left(\frac{1}{2} \right),$$

ahol $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény.

Megoldás. Mivel kompakt halmazon folytonos függvény korlátos, kapjuk, hogy f, f', f'' korlátosak. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Ekkor

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) - f\left(\frac{1}{2} \right) \right] \mathsf{d}x_1 \cdots \mathsf{d}x_n = \mathbb{E}\Big(f\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \right) - f(1/2) \Big).$$

Mivel f kétszer folytonosan differenciálható, ezért másodrendig Taylor-sorba fejthetjük $1/2$ körül:

$$f(x) = f(1/2) + f'(1/2)(x - 1/2) + \frac{1}{2} f''\big(1/2 + \theta(x)(x - 1/2)\big)(x - 1/2)^2, \tag{2.3.23}$$

ahol $0 < \theta(x) < 1$, és x $1/2$-nek egy alkalmas környezetéből való. Helyettesítsünk az előző egyenlőségben x helyére $(\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n := S_n/n$-et, majd vegyük mindkét oldal várható értékét:

$$\mathbb{E}\Big[f\left(\frac{S_n}{n} \right) - f(1/2) \Big] = f'(1/2)\, \mathbb{E}\Big(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \Big) + \frac{1}{2} \mathbb{E}\Big[f''\Big(1/2 + \theta\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right) \Big) \left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right)^2 \Big],$$

ahol θ egy olyan függvénye ω-nak, melyre $|\theta| < 1$. Megjegyezzük, hogy θ nem lesz feltétlenül valószínűségi változó, azonban erre nincs is szükségünk, ugyanis $f''\Big(1/2 + \theta\,(S_n/n - 1/2)\Big)$ valószínűségi változó. Valóban, (2.3.23) alapján $f''\Big(1/2+\theta\,(S_n/n - 1/2)\Big)$ előállítható (kifejezhető) valószínűségi változók mérhető függvényeként. Itt az x helyére történő helyettesítést végrehajthattuk, mert a nagy számok erős törvénye szerint:

$$\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}\xi_1 = \frac{1}{2} \quad P\text{-m.m.}$$

Mivel f'' folytonos, $|\theta| < 1$, és egy korlátos sorozatnak egy nullsorozattal vett szorzata továbbra is nullsorozat, kapjuk, hogy

$$f''\Big(1/2 + \theta\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)\Big) \to f''(1/2) \quad P\text{-m.m.}$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n} n\mathbb{E}\xi_1 = \frac{1}{2},\\
\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)^2 &= \mathbb{D}^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n\mathbb{D}^2\xi_1 = \frac{1}{12n}.
\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(f''\Big(1/2 + \theta\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)\Big) - f''(1/2)\right) n\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 0. \tag{2.3.24}$$

Ezt felhasználva már következik, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}\Big[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\Big] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[nf''\Big(1/2 + \theta\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)\Big)\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)^2\Big]\\
&= \frac{1}{2} f''(1/2) \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[n\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)^2\Big] = \frac{1}{2} f''(1/2)\frac{1}{12} = \frac{f''(1/2)}{24}.
\end{aligned}$$

Rátérünk (2.3.24) igazolására. A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big(f''\Big(1/2 + \theta(S_n/n - 1/2)\Big) - f''(1/2)\Big)n(S_n/n - 1/2)^2\Big]\\
&\qquad\leqslant \sqrt{\mathbb{E}\Big[f''\big(1/2 + \theta\,(S_n/n - 1/2)\big) - f''(1/2)\Big]^2}\sqrt{\mathbb{E}\Big[n^2\,(S_n/n - 1/2)^4\Big]}.
\end{aligned}$$

Mivel

$$f''\Big(1/2 + \theta\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)\Big) \to f''(1/2) \quad P\text{-m.m.},$$

és f'' korlátos, a dominált konvergencia tétel alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\Big[f''\Big(1/2 + \theta\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right)\Big) - f''(1/2)\Big]^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Az alábbiakban $\mathbb{E}[(S_n/n-1/2)^4]$ viselkedését vizsgáljuk. A polinomiális tétel alapján:

$$\begin{aligned}\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^4 &= \left(\left(\frac{\xi_1}{n}-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{\xi_2}{n}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots+\left(\frac{\xi_n}{n}-\frac{1}{2n}\right)\right)^4\\ &= \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=4,\\ i_1,\dots,i_n\in\{0,1,2,3,4\}}} \frac{4!}{i_1!\cdots i_n!}\left(\frac{\xi_1}{n}-\frac{1}{2n}\right)^{i_1}\left(\frac{\xi_2}{n}-\frac{1}{2n}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\xi_n}{n}-\frac{1}{2n}\right)^{i_n}.\end{aligned}$$

Mivel ξ_i, $i=1,\dots,n$, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók,

$$\mathbb{E}\left(\frac{\xi_i}{n}-\frac{1}{2n}\right)=0, \quad i=1,\dots,n,$$

és mivel $\xi_1,\dots,\xi_n$ függetlenek is, kapjuk, hogy $\mathbb{E}[(S_n/n-1/2)^4]$ számolásánál az olyan tagok, melyekben valamelyik $i_k=1$ kiesnek. Mivel a $4=4+0$, $4=3+1$, $4=2+2$, $4=2+1+1$, $4=1+1+1+1$ felbontások lehetségesek az összeadandók sorrendjét nem figyelve, látjuk, hogy csak a $4=4+0$ és a $4=2+2$ felbontások adnak 0-tól különböző tagot. A $4=4+0$ felbontások száma n, a $4=2+2$ felbontások száma pedig $\binom{n}{2}$. Így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^4 &= n\mathbb{E}\left(\frac{\xi_1}{n}-\frac{1}{2n}\right)^4+\binom{n}{2}\frac{4!}{2!2!}\left(\mathbb{E}\left(\frac{\xi_1}{n}-\frac{1}{2n}\right)^2\right)^2\\ &= n\frac{1}{n^4}\mathbb{E}(\xi_1-1/2)^4+\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{2\cdot 3}{n^4}\left(\mathbb{E}(\xi_1-1/2)^2\right)^2 := \frac{c_1}{n^3}+\frac{3c_2(n-1)}{n^3}.\end{aligned}$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\, n^2\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right)^4=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_1}{n}+\frac{3c_2(n-1)}{n}\right)=3c_2=3(\mathbb{E}(\xi_1-1/2)^2)^2=3(\mathbb{D}^2\xi_1)^2=\frac{3}{12^2}.$$

Így megkapjuk (2.3.24)-et, hiszen a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséggel adódó felső becslésben az egyik sorozat nullsorozat, a másik pedig korlátos. □

2.3.17. Feladat. (Monthly 112., 2003/341.) Legyenek a, b és c páronként különböző valós számok. Határozzuk meg az

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(x+y+z)}\sin(ax+by+cz)}{\sqrt{x+y+z}}\,\mathsf{d}z\mathsf{d}y\mathsf{d}x$$

integrál értékét!

Megoldás. Jelölje a továbbiakban $I(a,b,c)$ a fenti integrál értékét. Ismert, hogy

$$\text{(2.3.25)}\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y+z)t^2}\,\mathsf{d}t=\frac{1}{\sqrt{x+y+z}}.$$

Valóban, ha ξ normális eloszlású valószínűségi változó 0 várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel, ahol

$$x+y+z=\frac{1}{2\sigma^2}, \quad \text{azaz} \quad \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x+y+z}},$$

akkor ξ sűrűségfüggvényének integrálja 1. Azaz

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+y+z)t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-(x+y+z)t^2}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

amiből már következik (2.3.25).

Így felhasználva, hogy $\sin(x) = \operatorname{Im} e^{ix} = \operatorname{Im}(\cos(x) + i\sin(x))$, $x \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}I(a,b,c) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y+z)} \sin(ax+by+cz) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x+y+z)t^2}\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x(t^2+1)} e^{-y(t^2+1)} e^{-z(t^2+1)} \sin(ax+by+cz)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x(t^2+1)} e^{-y(t^2+1)} e^{-z(t^2+1)} e^{i(ax+by+cz)}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x(t^2+1-ia)}\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} e^{-y(t^2+1-ib)}\,\mathrm{d}y \int_0^{+\infty} e^{-z(t^2+1-ic)}\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy tetszőleges $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ valós számpár esetén

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(a-ib)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-x(a-ib)}}{-(a-ib)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-ib},$$

kapjuk, hogy

$$I(a,b,c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1-ia)(t^2+1-ib)(t^2+1-ic)}\,\mathrm{d}t.$$

Elkészítjük az integrandus parciális törtek alakjában való felbontását. Keressünk olyan k_1, k_2 és k_3 valós számokat, hogy

$$\frac{1}{(t^2+1-ia)(t^2+1-ib)(t^2+1-ic)} = \frac{k_1}{t^2+1-ia} + \frac{k_2}{t^2+1-ib} + \frac{k_3}{t^2+1-ic}.$$

(Mivel a, b és c páronként különbözőek, ilyen k_1, k_2 és k_3 létezik.) Ekkor

$$\begin{aligned}1 &= k_1(t^2+1-ib)(t^2+1-ic) + k_2(t^2+1-ia)(t^2+1-ic) + k_3(t^2+1-ia)(t^2+1-ib),\\
&\Updownarrow\\
1 &= k_1(t^4+t^2-ict^2+t^2+1-ic-ibt^2-ib-bc)\\
&\quad + k_2(t^4+t^2-ict^2+t^2+1-ic-iat^2-ia-ac)\\
&\quad + k_3(t^4+t^2-ibt^2+t^2+1-ib-iat^2-ia-ab)\\
&= (k_1+k_2+k_3)t^4 + t^2\big[k_1(2-ic-ib) + k_2(2-ic-ia) + k_3(2-ib-ia)\big]\\
&\quad + k_1(1-ic-ib-bc) + k_2(1-ic-ia-ac) + k_3(1-ib-ia-ab).\end{aligned}$$

Az együtthatók összehasonlításából adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&k_1 + k_2 + k_3 = 0,\\
&k_1(2 - ic - ib) + k_2(2 - ic - ia) + k_3(2 - ib - ia) = 0,\\
&k_1(1 - ic - ib - bc) + k_2(1 - ic - ia - ac) + k_3(1 - ib - ia - ab) = 1.
\end{aligned}$$

Így $k_3 = -k_1 - k_2$, amit beírva a második egyenletbe kapjuk, hogy

(2.3.26) $$k_1(a - c) + k_2(b - c) = 0,$$

illetve, beírva a harmadik egyenletbe adódik, hogy

(2.3.27) $$k_1(a - c)(b + i) + k_2(b - c)(a + i) = 1.$$

Beszorozva (2.3.26)-et $(b + i)$-vel, majd levonva belőle (2.3.27)-et, kapjuk, hogy $k_2(b - c)(b - a) = -1$, és így

$$k_2 = \frac{1}{(a - b)(b - c)}.$$

És ezért

$$k_1 = \frac{1}{(a - b)(c - a)}, \qquad k_3 = \frac{1}{(c - a)(b - c)}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I(a, b, c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathsf{Im}\int_0^{+\infty} \Big(&\frac{1}{(a - b)(c - a)}\frac{1}{t^2 + 1 - ia} + \frac{1}{(a - b)(b - c)}\frac{1}{t^2 + 1 - ib}\\
&+ \frac{1}{(c - a)(b - c)}\frac{1}{t^2 + 1 - ic}\Big)\,\mathsf{d}t.
\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy tetszőleges olyan $z \in \mathbb{C}$ komplex számra, melyre $\mathsf{Re}\,z > 0$, fennáll, hogy

(2.3.28) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + z^2}\,\mathsf{d}t = \frac{\pi}{2z}.$$

Ha $z > 0$ valós szám, akkor

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + z^2}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{z^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (t/z)^2}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{z^2}\left[z \arctan\left(\frac{t}{z}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{z}(\pi/2 - 0) = \pi/(2z).$$

Ha $z \in \mathbb{C}$, $\mathsf{Re}\,z > 0$, akkor

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + z^2}\,\mathsf{d}t &= -\frac{1}{2iz}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t + iz} - \frac{1}{t - iz}\right)\mathsf{d}t = -\frac{1}{2iz}\lim_{\Gamma\to\infty}\int_{1/\Gamma}^{\Gamma} \left(\frac{1}{t + iz} - \frac{1}{t - iz}\right)\mathsf{d}t\\
&= -\frac{1}{2iz}\lim_{\Gamma\to\infty}\Big[\log(t + iz) - \log(t - iz)\Big]_{t=1/\Gamma}^{\Gamma} = -\frac{1}{2iz}\lim_{\Gamma\to\infty}\left[\log\frac{t + iz}{t - iz}\right]_{t=1/\Gamma}^{\Gamma}\\
&= -\frac{1}{2iz}\lim_{\Gamma\to\infty}\log\left(\frac{\Gamma + iz}{\Gamma - iz}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma} - iz}{\frac{1}{\Gamma} + iz}\right).
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\lim_{\Gamma\to\infty}\frac{\Gamma+iz}{\Gamma-iz}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}-iz}{\frac{1}{\Gamma}+iz}=1(-1)=-1. \tag{2.3.29}$$

Tudva azt, hogy a komplex logaritmus függvény nem folytonos a negatív valós tengely mentén, nem elég (2.3.29)-ben csak a határérték (-1) ismerete, ahhoz, hogy a

$$\lim_{\Gamma\to\infty}\log\left(\frac{\Gamma+iz}{\Gamma-iz}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}-iz}{\frac{1}{\Gamma}+iz}\right)\qquad\text{értéket meghatározzuk.}$$

(A teljesség kedvéért leírjuk a komplex logaritmus definícióját. A $z=re^{i\varphi}$ komplex szám logaritmusa az $\log z=\ln r+i\varphi$ komplex szám, ahol $\varphi\in]-\pi,\pi]$. Így látjuk, hogy a negatív valós tengelyhez közeli pontokban, ha $\mathsf{Im}\,(z)>0$, akkor φ π-hez, ha $\mathsf{Im}\,(z)<0$, akkor φ $-\pi$-hez közeli érték. Azaz $\log$ nem folytonos a negatív valós tengely mentén.) Ekkor a $z=z_1+iz_2$ jelöléssel élve $z_1>0$ és

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma+iz}{\Gamma-iz}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}-iz}{\frac{1}{\Gamma}+iz}&=\frac{\Gamma+iz_1-z_2}{\Gamma-iz_1+z_2}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}-iz_1+z_2}{\frac{1}{\Gamma}+iz_1-z_2}=\frac{\Gamma-z_2+iz_1}{\Gamma+z_2-iz_1}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}+z_2-iz_1}{\frac{1}{\Gamma}-z_2+iz_1}\\
&=\frac{(\Gamma-z_2+iz_1)(\Gamma+z_2+iz_1)}{(\Gamma+z_2)^2+z_1^2}\cdot\frac{(\frac{1}{\Gamma}+z_2-iz_1)(\frac{1}{\Gamma}-z_2-iz_1)}{(\frac{1}{\Gamma}-z_2)^2+z_1^2}\\
&=\frac{\Gamma^2-z_2^2-z_1^2+i2z_1\Gamma}{(\Gamma+z_2)^2+z_1^2}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma^2}-z_2^2-z_1^2-i2z_1\frac{1}{\Gamma}}{(\frac{1}{\Gamma}-z_2)^2+z_1^2}.
\end{aligned}$$

Így

$$\mathsf{Im}\left(\frac{\Gamma+iz}{\Gamma-iz}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}-iz}{\frac{1}{\Gamma}+iz}\right)=c\left[-\frac{2}{\Gamma}z_1(\Gamma^2-z_1^2-z_2^2)+2\Gamma z_1\left(\frac{1}{\Gamma^2}-z_1^2-z_2^2\right)\right],$$

ahol

$$c=\left((\Gamma+z_2)^2+z_1^2\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{\Gamma}-z_2\right)^2+z_1^2\right)^{-1}.$$

Mivel $z_1>0$, ha Γ elég nagy pozitív szám, akkor

$$\mathsf{Im}\left(\frac{\Gamma+iz}{\Gamma-iz}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}-iz}{\frac{1}{\Gamma}+iz}\right)<0.$$

Tehát a (2.3.29)-beli sorozat úgy konvergál -1-hez, hogy egy index után a sorozat tagjainak képzetes részei negatívak. Így, a $z=re^{i\varphi}$, $\varphi\in]-\pi,\pi]$ előállítást alapul véve, a sorozat úgy konvergál -1-hez, hogy a megfelelő „φ-sorozat” $-\pi$-hez konvergál. Ezért

$$\lim_{\Gamma\to\infty}\log\left(\frac{\Gamma+iz}{\Gamma-iz}\cdot\frac{\frac{1}{\Gamma}-iz}{\frac{1}{\Gamma}+iz}\right)=-i\pi.$$

Így kapjuk (2.3.28)-et. (Vegyük észre, hogy $\log(-1)=i\pi$.)

Ekkor

$$\frac{1}{t^2+1-ia}=\frac{1}{t^2+(\sqrt{1-ia})^2},$$

ahol

$$\sqrt{1-ia} = (1+a^2)^{1/4}\Big(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2)\Big),$$

ahol $\tan\alpha = -a$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, és így $\mathsf{Re}\,(\sqrt{1-ia}) > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I(a,b,c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathsf{Im}\Big(&\frac{1}{(a-b)(c-a)}\frac{\pi}{2\sqrt{1-ia}} + \frac{1}{(a-b)(b-c)}\frac{\pi}{2\sqrt{1-ib}} \\ &+ \frac{1}{(c-a)(b-c)}\frac{\pi}{2\sqrt{1-ic}}\Big). \end{aligned}$$

Ekkor

$$\mathsf{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{1-ia}}\right) = -(1+a^2)^{-1/4}\sin(\alpha/2) = -(1+a^2)^{-1/4}\sin\left(\frac{\arctan(-a)}{2}\right),$$

és

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\arctan(-a)}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\arctan(a)}{2}\right) = -\mathrm{sgn}(a)\sqrt{\frac{1-\cos(\arctan(a))}{2}} \\ &= -\mathrm{sgn}(a)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}{2}} = -\mathrm{sgn}(a)\sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{2\sqrt{1+a^2}}} \\ &= -\mathrm{sgn}(a)\frac{1}{\sqrt{2}}(1+a^2)^{-1/4}\sqrt{\sqrt{1+a^2}-1}. \end{aligned}$$

És ezért

$$I(a,b,c) = \frac{f(a)}{(a-b)(c-a)} + \frac{f(b)}{(a-b)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(b-c)},$$

ahol minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sgn}(x)\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}}{(1+x^2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2}}.$$

Megjegyezzük, hogy hasonló okoskodással kaphatjuk, hogy

$$I(a,a,a) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\frac{\sin(\frac{5}{2}\arctan(a))}{(1+a^2)^{5/4}}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

□

2.3.18. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan független valószínűségi változók, melyekre valamely $\alpha < 1/2$ esetén $P(\xi_n = n^\alpha) = P(\xi_n = -n^\alpha) = 1/2$. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k = 0\Big) = 1.$$

Megoldás. A következő ún. **Kolmogorov-tétel** alapján okoskodunk: legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, négyzetesen integrálható valószínűségi változók, valamint $\{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ pozitív valós számok olyan sorozata, hogy $b_n \uparrow +\infty$.

$$\text{Ha } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^2 \xi_k}{b_k^2} < +\infty, \text{ akkor } \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) \to 0 \text{ P-m.m.}$$

Ellenőrizzük, hogy a Kolmogorov-tétel feltételei teljesülnek-e a megadott $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sorozatra! Egyrészt $\xi_n,\ n \in \mathbb{N}$, függetlenek, és

$$\mathbb{E}\xi_n^2 = (n^\alpha)^2 \frac{1}{2} + (-n^\alpha)^2 \frac{1}{2} = n^{2\alpha} < +\infty,$$

azaz $\xi_n,\ n \in \mathbb{N}$ négyzetesen integrálhatók. Továbbá legyen $b_n := n,\ n \in \mathbb{N}$, és így $b_n \uparrow +\infty$. Mivel $\mathbb{E}\xi_n = n^\alpha/2 + (-n^\alpha)/2 = 0,\ n \in \mathbb{N}$, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^2 \xi_k}{b_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\xi_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2\alpha}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(1-\alpha)}} < +\infty,$$

hiszen $\alpha < 1/2$ miatt $2(1-\alpha) > 1$. A Kolmogorov-tétel alapján pedig kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - 0) \to 0 \quad \text{P-m.m.}$$

□

2.3.19. Feladat. Legyen $q \in \mathbb{N}$ és legyenek $\{\varepsilon_n\}_{n=1-q}^{\infty}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\varepsilon_1| < +\infty$. Legyenek $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{R}$ és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n := \alpha_0\varepsilon_n + \alpha_1\varepsilon_{n-1} + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{n-q}$. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = \mathbb{E}\varepsilon_1 \cdot \sum_{j=0}^{q} \alpha_j \Big) = 1.$$

Megoldás. A $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sorozatra a nagy számok erős törvénye nem alkalmazható, mert a sorozat tagjai nem függetlenek. Azonban visszavezetjük a feladat megoldását ε_n-ek függetlenségére. Ekkor

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_0\varepsilon_1 + \alpha_1\varepsilon_{1-1} + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{1-q}, \\
\xi_2 &= \alpha_0\varepsilon_2 + \alpha_1\varepsilon_{2-1} + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{2-q}, \\
&\ \vdots \\
\xi_n &= \alpha_0\varepsilon_n + \alpha_1\varepsilon_{n-1} + \cdots + \alpha_q\varepsilon_{n-q},
\end{aligned}$$

és így

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k-0} + \alpha_1 \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k-1} + \cdots + \alpha_q \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k-q}.$$

Felhasználva a nagy számok erős törvényét, kapjuk, hogy bármilyen $t \in \{0, \dots, q\}$ esetén

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k-t} \longrightarrow \mathbb{E}\varepsilon_{1-t} = \mathbb{E}\varepsilon_1 \quad \text{P-m.m.}$$

Így

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k &= \alpha_0 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k-0} + \alpha_1 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k-1} + \dots + \alpha_q \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k-q} \\ &\longrightarrow \alpha_0 \mathbb{E}\varepsilon_1 + \alpha_1 \mathbb{E}\varepsilon_1 + \dots + \alpha_q \mathbb{E}\varepsilon_1 \qquad \text{P-m.m,}\end{aligned}$$

hiszen q darab 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény. Azaz

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \longrightarrow \mathbb{E}\varepsilon_1 \sum_{j=0}^{q} \alpha_j \qquad \text{P-m.m.}$$

$\square$

2.3.20. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók, melyekre

$$P(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}, \qquad P(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, de

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -1\right) = 1.$$

(Ez a feladat arra mutat rá, hogy a nagy számok erős törvényében fontos az azonos eloszlásúság feltétele.)

Megoldás. Ekkor $\mathbb{E}X_n = n^{-2}(n^2 - 1) + (-1)(1 - n^{-2}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $A_n := \{X_n \neq -1\}$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = n^2 - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Ezért a Borel–Cantelli-lemma alapján kapjuk, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$, azaz

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} \{X_k = -1\}\Big) = 1.$$

Így

$$1 = P\Big(\Big\{\omega \in \Omega \;\Big|\; \exists\, n(\omega) \in \mathbb{N} : \forall\, k \geqslant n(\omega) : X_k(\omega) = -1\Big\}\Big),$$

és ezért egy ilyen rögzített $\omega \in \Omega$ esetén, ha $n \geqslant n(\omega)$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{S_n(\omega)}{n} &= \frac{n(\omega)}{n}\frac{S_{n(\omega)}(\omega)}{n(\omega)} + \frac{S_n(\omega) - S_{n(\omega)}(\omega)}{n} = \frac{n(\omega)}{n}\frac{S_{n(\omega)}(\omega)}{n(\omega)} + \frac{X_{n(\omega)+1}(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} \\ &= \frac{n(\omega)}{n}\frac{S_{n(\omega)}(\omega)}{n(\omega)} + \frac{(-1) + \cdots + (-1)}{n} = \frac{n(\omega)}{n}\frac{S_{n(\omega)}(\omega)}{n(\omega)} + \frac{(-1)(n - n(\omega))}{n} \\ &\to 0 - 1 = -1.\end{aligned}$$

Így $P(\{\omega \in \Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} \to -1\}) = 1$.
Vegyük észre, hogy a feladat megoldásához nincs szükség a függetlenségre.

Megjegyezzük, hogy az 1-valószínűségű konvergenciát az alábbi lemma segítségével is bizonyíthatnánk. Legyenek $\eta_n, n \in \mathbb{N}$ és η valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ekkor

$$P(\eta_n \to \eta) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{N\to\infty} P(\sup_{n\geqslant N} |\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Mivel bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$P(\sup_{n\geqslant N} |\eta_n - \eta| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(\sup_{n\geqslant N} |\eta_n - \eta| > \varepsilon/2) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} P(|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2),$$

ahhoz, hogy megmutassuk, hogy $P(\eta_n \to \eta) = 1$ elég azt igazolni, hogy

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Esetünkben az $\eta := -1$ és $\eta_n := S_n/n, n \in \mathbb{N}$, választásokkal élhetünk. □

2.3.21. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 7.3.8.) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X_1^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i X_j \longrightarrow (\mathbb{E}X_1)^2 \quad \text{P-m.m.}$$

2.3.22. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 7.4.1.) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független valószínűségi változók, hogy

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mutassuk meg, hogy $\frac{S_n}{n} \stackrel{st}{\longrightarrow} 0$, azonban $P(\frac{S_n}{n} \to 0) \neq 1$. Azaz $\frac{S_n}{n}$ sztochasztikusan tart 0-hoz, P-majdnem mindenütt viszont nem.

2.4. Borel–Cantelli-lemma és határeloszlás-tételek

A következő feladatok megoldása során szükségünk lesz (lehet) a $\liminf_{n\to\infty}$-ral, ill. a $\limsup_{n\to\infty}$-ral kapcsolatos alábbi állításokra.

Tétel: Egy valós számsorozat alsó határértéke (limesz inferiorja) és felső határértéke (limesz szuperiorja) a sorozat torlódási pontja.

Tétel: Egy valós számsorozatnak akkor és csak akkor van határértéke $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$-ban, ha az alsó és felső határértéke megegyezik.

Tétel: Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Ekkor egy $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ szám akkor és csak akkor alsó határértéke a sorozatnak, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(i) bármely $c < \alpha$, $c \in \mathbb{R}$ esetén $c < x_n$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével,

(ii) bármely $\alpha < c$, $c \in \mathbb{R}$ esetén $x_n < c$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re.

Tétel: Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Ekkor egy $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ szám akkor és csak akkor felső határértéke a sorozatnak, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(i) bármely $c < \alpha$, $c \in \mathbb{R}$ esetén $c < x_n$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re,

(ii) bármely $\alpha < c$, $c \in \mathbb{R}$ esetén $x_n < c$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.

Tétel: Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Ekkor

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geqslant n} x_k\big) \qquad \text{és} \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geqslant n} x_k\big).$$

2.4.1. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

Megoldás. A korábbiak alapján, ha $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ egy valós számsorozat, $a \in \mathbb{R}$, akkor ahhoz, hogy a $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ egyenlőséget megmutassuk elég azt igazolni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$-ra

$$\begin{aligned} &a_n \in [a+\varepsilon, +\infty) \quad \text{csak véges sok } n\text{-re},\\ &a_n \in [a-\varepsilon, +\infty) \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ függetlenek, a Borel–Cantelli-lemma alapján elég azt megmutatni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$-ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) < +\infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) = +\infty. \tag{2.4.30}$$

Ugyanis, ha $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) < +\infty$, akkor a Borel–Cantelli-lemma alapján a $\{\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$ események közül 1-valószínűséggel csak véges sok következik be. Ha pedig $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) = +\infty$, akkor szintén a Borel-Cantelli lemma miatt (ide kell a függetlenség) a $\{\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$ események közül 1-valószínűséggel végtelen sok következik be. Mivel két 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, ha belátjuk (2.4.30)-et, akkor kapjuk a dolgot.

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\xi_n \geqslant \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \log n\right).$$

Mivel

$$P\left(\xi_n \geqslant \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \log n\right) = 1 - F_{\xi_n}\left(\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) \log n\right) = 1 - 1 + e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\log n} = n^{-1-\lambda\varepsilon},$$

kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda\varepsilon}} < +\infty,$$

hiszen $1 + \lambda\varepsilon > 1$.

Hasonlóan,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \geqslant \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\xi_n \geqslant \left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right) \log n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right)\log n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\lambda\varepsilon}} = +\infty,\end{aligned}$$

hiszen $1 - \lambda\varepsilon < 1$.

Tehát azon $\omega \in \Omega$-k halmazának 1 a valószínűsége, melyekre $\xi_n(\omega)$ végtelen sokszor megy $\left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right)\log n$ fölé, és legfeljebb csak véges sokszor $\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)\log n$ fölé. □

2.4.2. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} = 0\right) = 1.$$

Megoldás. Az előző feladat megoldásához hasonlóan, elég azt igazolni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \leqslant \varepsilon\right) = +\infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \leqslant -\varepsilon\right) < +\infty.$$

Ekkor

$$P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \leqslant \varepsilon\right) = F_{\xi_n}(\varepsilon \log n) = 1 - e^{-\lambda\varepsilon \log n} = 1 - n^{-\lambda\varepsilon}$$

és $P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \leqslant -\varepsilon\right) = 0$, hiszen $-\varepsilon < 0$. Ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \leqslant \varepsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - n^{-\lambda\varepsilon}).$$

Ha ez utóbbi sor konvergens lenne, akkor $1 - n^{-\lambda\varepsilon} \to 0$ teljesülne, azonban $1 - n^{-\lambda\varepsilon} \to 1$. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \leqslant \varepsilon\right) = +\infty,$$

valamint

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\log n} \leqslant -\varepsilon\right) = 0 < +\infty.$$

Megjegyezzük, hogy felhasználva azt az előadáson tanult dolgot, hogy ha $\{\eta_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ független valószínűségi változók, akkor léteznek olyan $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ számok, hogy

$$P(\limsup_{n\to\infty} \eta_n = c_1) = 1 \qquad \text{és} \qquad P(\liminf_{n\to\infty} \eta_n = c_2) = 1,$$

azt biztosan tudjuk, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} = c\right) = 1.$$

(Azért lesz $c \in \mathbb{R}$, mert ξ_n-ek nemnegativitása folytán $0 \leqslant c$, és az előző feladat alapján $c \leqslant 1/\lambda$ kell legyen.) Azt azonban nem tudjuk megmondani, hogy mennyi c értéke. Azt könnyen beláthatjuk, az előzőektől függetlenül, hogy $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} \geqslant 0) = 1$. Valóban, mivel $P(\xi_n \geqslant 0) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy $P(\xi_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}) = 1$, és ezért

$$\begin{aligned} P\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} \geqslant 0\right) &= P\left(\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\log n} \geqslant 0\right\} \cap \{\xi_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}\}\right) \\ &= P(\xi_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}) = 1. \end{aligned}$$

□

2.4.3. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} = 1\right) = 1.$$

Első megoldás. Felhasználjuk az alábbi, előadáson tanult dolgot: léteznek olyan $x_0 > 0$ és $0 < c_1 < c_2$ számok, hogy

$$\frac{c_1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathsf{d}u \leqslant \frac{c_2}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \text{ha } x \geqslant x_0.$$

A korábbiakhoz hasonlóan elég azt igazolni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1+\varepsilon\right) < +\infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) = +\infty.$$

Ekkor, ha $n \geqslant n_0$, ahol $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\sqrt{2\log n_0}(1+\varepsilon) > x_0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1+\varepsilon\right) &= P\big(\xi_n \geqslant \sqrt{2\log n}(1+\varepsilon)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\log n}(1+\varepsilon)}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathsf{d}u \\ &\leqslant \frac{c_2}{\sqrt{2\log n}(1+\varepsilon)} e^{-\frac{(1+\varepsilon)^2 2\log n}{2}} = \frac{c_2}{\sqrt{2\log n}(1+\varepsilon)} \frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}}. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1+\varepsilon\right) &\leqslant \frac{c_2}{\sqrt{2}(1+\varepsilon)} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} \frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}} \\ &< \frac{c_2}{\sqrt{2}(1+\varepsilon)} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}} < +\infty, \end{aligned}$$

hiszen $(1+\varepsilon)^2 > 1$. Mivel az első $n_0 - 1$ tag összege kisebb vagy egyenlő, mint $n_0 - 1$, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1+\varepsilon\right) < +\infty.$$

Hasonlóan, ha $n \geqslant n_0$, ahol $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\sqrt{2\log n_0}(1-\varepsilon) > x_0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) &= P\big(\xi_n \geqslant \sqrt{2\log n}(1-\varepsilon)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\log n}(1-\varepsilon)}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathsf{d}u \\ &\geqslant \frac{c_1}{\sqrt{2\log n}(1-\varepsilon)} e^{-\frac{(1-\varepsilon)^2 2\log n}{2}} = \frac{c_1}{\sqrt{2\log n}(1-\varepsilon)} \frac{1}{n^{(1-\varepsilon)^2}}. \end{aligned}$$

Ha $\varepsilon \geqslant 1$, akkor $1-\varepsilon \leqslant 0$, és ezért

$$P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) \geqslant P(\xi_n \geqslant 0) = \frac{1}{2}.$$

Így kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty, \quad \text{ha } \varepsilon \geqslant 1.$$

Ha $0 < \varepsilon < 1$, akkor

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) \geqslant \frac{c_1}{\sqrt{2}(1-\varepsilon)} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}\, n^{(1-\varepsilon)^2}}.$$

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $n_0' \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant n_0'$ esetén $\sqrt{\log n}\, n^{(1-\varepsilon)^2} < n$. Azonos átalakításokat végezve:

$$\begin{aligned} \sqrt{\log n}\, n^{(1-\varepsilon)^2} < n \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\log n} < n^{1-(1-\varepsilon)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \log n < n^{2\varepsilon(2-\varepsilon)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \log(\log n) < 2\varepsilon(2-\varepsilon)\log n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\log(\log n)}{\log n} < 2\varepsilon(2-\varepsilon). \end{aligned}$$

Mivel $0 < \varepsilon < 1$ esetén, $2\varepsilon(2-\varepsilon) > 0$, n_0' létezése következik, ha megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log n)}{\log n} = 0.$$

A $\mathcal{L}$'Hospital szabály alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log n)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 0.$$

(Megjegyezzük, hogy vizsgálhattuk volna direktben is a $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\log n}n^{(1-\varepsilon)^2}}{n}$ határértéket.) Így

$$\sum_{n=\max(n_0,n_0')}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) \geqslant \frac{c_1}{\sqrt{2}(1-\varepsilon)} \sum_{n=n_0'}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

és ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) = +\infty.$$

Második megoldás. A korábbiakhoz hasonlóan elég azt igazolni, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1+\varepsilon\right) < +\infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) = +\infty.$$

Ezen feltételek teljesülését most az első megoldástól eltérő módon mutatjuk meg. Felhasználva, hogy ha $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$, akkor $-\eta \stackrel{\mathcal{D}}{=} \eta$, és

$$\begin{aligned} P(|\eta| \geqslant \delta) &= P\big(\{\eta \geqslant \delta\} \cup \{\eta \leqslant -\delta\}\big) = P(\eta \geqslant \delta) + P(\eta \leqslant -\delta) \\ &= P(\eta \geqslant \delta) + P(-\eta \leqslant -\delta) = 2P(\eta \geqslant \delta), \quad \forall\, \delta > 0, \end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1+\varepsilon\right) < +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} P\big(\xi_1 \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}\big) < +\infty$$

$$\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} P\big(|\xi_1| \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}\big) < +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} P\big(\xi_1^2 \geqslant (1+\varepsilon)^2 2\log n\big) < +\infty$$

$$\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} P\big(e^{\xi_1^2} \geqslant e^{(1+\varepsilon)^2 2\log n}\big) < +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} P\big(e^{\xi_1^2} \geqslant n^{2(1+\varepsilon)^2}\big) < +\infty$$

$$\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} P\big(e^{\frac{\xi_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}} \geqslant n\big) < +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}e^{\frac{\xi_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}} < +\infty,$$

ahol az utolsó ekvivalencia származtatásánál a 2.3.6. Feladat $(a) \Longleftrightarrow (b)$ részét használtuk $\varepsilon = 1$ választással.

Hasonlóan, felhasználva a 2.3.9. Feladatot kaphatjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{2\log n}} \geqslant 1-\varepsilon\right) = +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{E}e^{\frac{\xi_1^2}{2(1-\varepsilon)^2}} = +\infty.$$

Az alábbiakban meghatározzuk tetszőleges $u \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{E}e^{u\xi^2}$ várható értéket, ahol $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. (Mivel $e^{u\xi^2} \geqslant 0$, az $\mathbb{E}e^{u\xi^2}$ várható érték létezik (legfeljebb $+\infty$).) Ekkor

$$\mathbb{E}e^{u\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2(1/2-u)}\,\mathsf{d}x.$$

Ismert, hogy tetszőleges $\sigma > 0$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathsf{d}x = \sqrt{2\pi}\sigma.$$

Így ha $u < 1/2$, akkor legyen $\sigma > 0$ olyan, hogy

$$-\frac{1}{2\sigma^2} = -\left(\frac{1}{2} - u\right) \qquad\Longrightarrow\qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{1-2u}},$$

és ekkor

$$\mathbb{E}e^{u\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2u}}, \quad u < \frac{1}{2}.$$

Abban az esetben, ha $u \geqslant 1/2$, azaz $-(1/2-u) \geqslant 0$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}e^{u\xi^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^0\,\mathsf{d}x = +\infty,$$

azaz $\mathbb{E}e^{u\xi^2} = +\infty$, ha $u \geqslant 1/2$. Összefoglalva,

$$\mathbb{E}e^{u\xi^2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-2u}} & \text{ha} \quad u < 1/2, \\ +\infty & \text{ha} \quad u \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Mindezek miatt adódik, hogy

$$\mathbb{E}e^{\frac{\xi_1^2}{2(1+\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}} < +\infty,$$

hiszen $\frac{1}{2(1+\varepsilon)^2} < 1/2$. Hasonlóan,

$$\mathbb{E}e^{\frac{\xi_1^2}{2(1-\varepsilon)^2}} = +\infty,$$

hiszen $\frac{1}{2(1-\varepsilon)^2} > 1/2$. □

2.4.4. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy a $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjainak halmaza 1 valószínűséggel a $[0,1]$ intervallum.

Megoldás. A torlódási pont definícióját felhasználva elég azt belátni, hogy azon $\omega \in \Omega$-k halmazának 1 a valószínűsége, melyekre fennáll, hogy tetszőleges $[0,1]$-beli részintervallumban a $\{\xi_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ sorozatnak végtelen sok eleme van. Mivel tetszőleges $[0,1]$-beli részintervallumban van racionális végpontú intervallum, elég az $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$, $\alpha < \beta$ alakú intervallumokat tekinteni. Azt kell tehát belátni, hogy

$$P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \forall\, \alpha,\beta \in [0,1]\cap\mathbb{Q}, \alpha<\beta \ \text{ esetén } \ \xi_n(\omega) \in [\alpha,\beta] \ \text{ végtelen sok } \ n\text{-re}\big\}\Big) = 1.$$

Felhasználva, hogy megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, kapjuk, hogy elég azt belátni, hogy bármilyen rögzített $\alpha,\beta \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$, $\alpha<\beta$ esetén

$$P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \xi_n(\omega) \in [\alpha,\beta] \ \text{ végtelen sok } \ n\text{-re}\big\}\Big) = 1. \tag{2.4.31}$$

Mivel $\{\xi_n \in [\alpha,\beta]\}$, $n \in \mathbb{N}$ független események és

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n \in [\alpha,\beta]) = \sum_{n=1}^{\infty}(\beta-\alpha) = +\infty,$$

a Borel–Cantelli-lemma alapján kapjuk (2.4.31)-t. □

2.4.5. Feladat. Legyen ξ $(0,1)$-paraméterű Cauchy-eloszlású valószínűségi változó, azaz ξ sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ξ karakterisztikus függvénye

$$\varphi_\xi(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. A megoldás során felhasználjuk az ún. inverziós formulát: ha η karakterisztikus függvénye $\varphi_\eta \in L^1(\mathbb{R})$, azaz $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_\eta(t)|\,\mathsf{d}t < +\infty$, akkor η-nak létezik folytonos, korlátos sűrűségfüggvénye és

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_\eta(t)\,\mathsf{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Első lépésként leellenőrizzük, hogy $e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ tényleg karakterisztikus függvény. Ennek több útja is van. Az egyik, hogy észrevesszük, hogy $\frac{1}{2}e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ sűrűségfüggvény, és ennek a karakterisztikus függvényére alkalmazva az inverziós formulát okoskodunk. A másik út, hogy a **Pólya-féle (elégséges) kritérium** feltételeit ellenőrizzük le. Mi ez utóbbit teszzük. Először felírjuk a Pólya-kritériumot.

Pólya-kritérium: Ha a $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek, hogy

(i) ϕ nemnegatív, folytonos, páros,

(ii) a $[0, +\infty)$ szakaszon monoton csökkenő,

(iii) a $[0, +\infty)$ szakaszon konvex,

(iv) $\phi(0) = 1$,

(v) $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$,

akkor ϕ egy valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.

Mivel a $\varphi_\xi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek a Pólya-kritérium feltételei, φ_η tényleg karakterisztikus függvény. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_\xi(t)|\,\mathsf{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathsf{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathsf{d}t + \int_{-\infty}^0 e^t\,\mathsf{d}t \\ &= \left[\frac{e^{-t}}{-1}\right]_0^{+\infty} + \left[e^t\right]_{-\infty}^0 = 1 + 1 = 2 < +\infty,\end{aligned}$$

és így $\varphi_\xi \in L^1(\mathbb{R})$.

Ezért az $e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ karakterisztikus függvényhez tartozó valószínűségi változónak (ami az egyértelműségi tétel alapján eloszlásfüggvénye erejéig egyértelműen meghatározott) az inverziós formula alapján létezik folytonos, korlátos sűrűségfüggvénye, jelölje ezt f_ξ. Ekkor

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}\,\mathsf{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)e^{-|t|}\,\mathsf{d}t + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)e^{-|t|}\,\mathsf{d}t,$$

és

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)e^{-|t|}\,\mathsf{d}t &= \int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t + \int_{-\infty}^0 \sin(tx)e^t\,\mathsf{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t - \int_0^{+\infty} \sin(yx)e^{-y}\,\mathsf{d}y = 0.\end{aligned}$$

ahol a második integrálban végrehajtottuk az $t := -y$ helyettesítést. Ezért, hasonlóan az előzőekhez,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)e^{-|t|}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t.$$

Parciális integrálással határozzuk meg ez utóbbi integrál értékét. Legyenek

$$\begin{array}{ll} f(t) = \cos(tx), & g'(t) = e^{-t}, \\ \Downarrow & \Downarrow \\ f'(t) = -x\sin(tx) & g(t) = -e^{-t}, \end{array}$$

és így

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t &= \frac{1}{\pi}\left[-e^{-t}\cos(tx)\right]_0^{+\infty} - \frac{x}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sin(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{x}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sin(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t.\end{aligned}$$

Újra a parciális integrálás módszerével élve, legyenek

$$\begin{array}{ll} f(t) = \sin(tx), & g'(t) = e^{-t}, \\ \Downarrow & \Downarrow \\ f'(t) = x\cos(tx) & g(t) = -e^{-t}, \end{array}$$

és így

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t &= \frac{1}{\pi} - \frac{x}{\pi}\Big(\left[-e^{-t}\sin(tx)\right]_0^{+\infty} + x\int_{0}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t\Big) \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{x^2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t.\end{aligned}$$

Ezért

$$\frac{1}{\pi} = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{x^2}{\pi}\right)\int_{0}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t \quad\Longrightarrow\quad \int_{0}^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{1+x^2},$$

azaz

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}\,\mathsf{d}t = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Megjegyezzük, hogy egyszerűbben is kiszámíthatjuk a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}\,\mathsf{d}t$ integrál értékét. Nevezetesen,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-|t|}\,\mathsf{d}t &= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)}\,\mathsf{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+ix)}\,\mathsf{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1-ix)}\,\mathsf{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+ix)}\,\mathsf{d}t \\ &= \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Így megmutattuk, hogy az $e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ karakterisztikus függvényhez tartozó valószínűségi változó (ami eloszlása erejéig egyértelműen meghatározott) Cauchy-eloszlású. Mivel az eloszlások és a karakterisztikus függvények kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, kapjuk az állítást. $\square$

2.4.6. Feladat. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, $(0,1)$-paraméterű Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}$ is $(0,1)$-paraméterű Cauchy-eloszlású.

Megoldás. Legyen $\eta := \frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}$. Az egyértelműségi tétel alapján elég azt megmutatni, hogy $\varphi_\eta(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Felhasználva, hogy $\xi_1, \dots, \xi_n$ függetlenek, azonos Cauchy-eloszlásúak, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(t) &= \mathbb{E}e^{it\eta} = \mathbb{E}e^{i\frac{t}{n}(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = \varphi_{\xi_1+\cdots+\xi_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\cdots\varphi_{\xi_n}\left(\frac{t}{n}\right)\\ &= \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(e^{-\left|\frac{t}{n}\right|}\right)^n = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$\square$

2.4.7. Feladat. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, $\mathcal{N}(0,1)$-eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}}$ is $\mathcal{N}(0,1)$-eloszlású.

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan, legyen $\eta := \frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(t) &= \mathbb{E}e^{it\eta} = \mathbb{E}e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = \varphi_{\xi_1+\cdots+\xi_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdots\varphi_{\xi_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\\ &= \left(\varphi_{\xi_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(e^{-\frac{(t/\sqrt{n})^2}{2}}\right)^n = e^{-t^2/2} = \varphi_{\xi_1}(t), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$\square$

2.4.8. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \infty\Big) = P\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = 1.$$

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \infty\Big) = 1.$$

A valószínűség folytonossága miatt kapjuk, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \infty\Big) = \lim_{K\to\infty} P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} > K\Big).$$

Az előadáson tanult dolgok miatt bármilyen $K \in \mathbb{R}$ esetén a $\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > K\}$ esemény benne van a $\{\sigma(\xi_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ σ-algebrák által meghatározott farok σ-algebrában. Így a Kolmogorov 0-1 törvény alapján

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > K\Big) \in \{0, 1\}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > K\Big) = 1, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ehhez elég azt igazolni, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > K) > 0$, $K \in \mathbb{R}$. Ehhez megmutatjuk, hogy

$$0 < P\left(\frac{S_n}{n} > K \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\right), \qquad K \in \mathbb{R},$$

amiből már következik, hogy

$$0 < P\Big(\frac{S_n}{n} > K \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big) \leqslant P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geqslant K\Big), \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Végezzük el az alábbi becsléseket,

$$\begin{aligned}
P\Big(\frac{S_n}{n} > K \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big) &= P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} \Big\{\frac{S_m}{m} > K\Big\}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{m=n}^{+\infty} \Big\{\frac{S_m}{m} > K\Big\}\Big) \\
&\geqslant \limsup_{n\to\infty} P\Big(\frac{S_n}{n} > K\Big) = \limsup_{n\to\infty} \int_K^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_K^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x > 0,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy a 2.4.6. Feladat alapján S_n/n Cauchy-eloszlású minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Belátjuk most, hogy

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = 1.$$

A valószínűség folytonossága alapján

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = \lim_{K\to\infty} P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < K\Big).$$

Hasonlóan a korábbiakhoz

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < K\Big) \in \{0, 1\}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < K\Big) = 1, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Ehhez elég azt igazolni, hogy $P(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} < K) > 0$, $K \in \mathbb{R}$. Ehhez megmutatjuk, hogy

$$0 < P\left(\frac{S_n}{n} < K \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\right), \qquad K \in \mathbb{R},$$

amiből már következik, hogy

$$0 < P\Big(\frac{S_n}{n} < K \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big) \leqslant P\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} \leqslant K\Big), \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Hasonlóan a korábbiakhoz,

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{S_n}{n} < K \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big) &= P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{m=n}^{+\infty}\Big\{\frac{S_m}{m} < K\Big\}\Big) \\ &\geqslant \limsup_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{K}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{K}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathsf{d}x > 0, \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a 2.3.7. Feladatot használva nem lehet megoldani ezt a példát, mert a Cauchy-eloszlásnak nem létezik a várható értéke. □

2.4.9. Feladat. (Rényi [2], 3.2.17.) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, nemnegatív egész értékű valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ sor akkor és csak akkor konvergens 1-valószínűséggel, ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > 0) < +\infty$.

Megoldás. Végiggondoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ sor 1-valószínűséggel való konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele, hogy 1-valószínűséggel véges sok X_i kivételével a többiek 0-val legyenek egyenlők. Valóban,

$$P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{konvergens}\Big) = 1 \quad \Longrightarrow \quad P\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\Big) = 1.$$

Mivel X_n-ek nemnegatív egész értékűek, ez csak úgy lehet, hogy egy index után minden X_n nulla. A másik irány triviális.

Az, hogy 1-valószínűséggel véges sok X_i kivételével a többiek 0-val legyenek egyenlők, a Borel–Cantelli-lemma alapján ekvivalens azzal, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > 0) < +\infty$. □

2.4.10. Feladat. (Monthly, 2003/438. nyomán) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan differenciálható függvény, melyre $f(0) = 1$, f és f' seholsem nulla $\mathbb{R}$-en. Legyen ξ_1 egy pozitív valószínűségi változó és minden $n \geqslant 1$ esetén $\xi_{n+1} = \xi_n f(\xi_n)$. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ 1-valószínűséggel divergens.

Megoldás. Mivel f folytonos, $f(0) = 1 > 0$ és f seholsem nulla, kapjuk, hogy $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Így $P(\xi_n > 0) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Megmutatjuk, hogy f szigorúan monoton. Tegyük fel indirekt, hogy nem az. Ekkor léteznek olyan $u, v \in \mathbb{R}$, $u \neq v$ valós számok, hogy $f(u) = f(v)$. Ezért Rolle-tétele alapján létezik olyan $w \in \mathbb{R}$, hogy $f'(w) = 0$, ez azonban ellentmond a kiindulási feltételeknek.

Ha f szigorúan monoton növekvő, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén 1-valószínűséggel igaz a következő egyenlőtlenség
$$\xi_{n+1} = \xi_n f(\xi_n) > \xi_n f(0) = \xi_n.$$
Mivel megszámlálható sok 1-valószínűségű esemény metszete is 1-valószínűségű esemény, kapjuk, hogy ξ_n 1-valószínűséggel szigorúan monoton növekvő, s ezért 1-valószínűséggel nem konvergál 0-hoz, és így $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ 1-valószínűséggel divergens.

Ha f szigorúan monoton csökkenő, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén 1-valószínűséggel igaz a következő egyenlőtlenség
$$0 < \xi_{n+1} = \xi_n f(\xi_n) < \xi_n f(0) = \xi_n.$$
Így az előzőhöz hasonlóan a $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat 1-valószínűséggel szigorúan monoton csökkenő. Mivel egy valós értékű, monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat konvergens, kapjuk, hogy ξ_n 1-valószínűséggel konvergens.

Legyen $\xi := \lim_{n\to\infty} \xi_n$, ekkor mivel f folytonos, kapjuk, hogy $P(\xi = \xi f(\xi)) = 1$, és így $P(\{\xi = 0\} \cup \{f(\xi) = 1\}) = 1$. Mivel f szigorúan monoton és $f(0) = 1$, kapjuk, hogy $P(\xi = 0) = 1$. Így ξ_n 1-valószínűséggel monoton csökkenően tart 0-hoz, illetve
$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = f(\xi_n) \quad \uparrow \quad f(\xi) = f(0) = 1.$$
Az alábbiakban felhasználjuk a sorok konvergenciájára vonatkozó ún. Limit Comparison Tételt.

Limit Comparison Theorem: Legyen $\{a_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ és $\{b_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ két olyan sorozat, hogy létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant N$ esetén $a_n \geqslant 0$ és $b_n > 0$.

(i) Tegyük fel, hogy a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} := L$$
határérték létezik és $0 < L < +\infty$. Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ egyszerre konvergens, illetve divergens.

(ii) Tegyük fel, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$
Ekkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, úgy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is.

A Limit Comparison tétel segítségével vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} - \ln(f(\xi_n))$ sorok konvergenciáját. Mivel $0 < f(\xi_n) < 1,\, n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy $\ln(f(\xi_n)) < 0,\, n \in \mathbb{N}$, azaz $-\ln(f(\xi_n)) > 0,\, n \in \mathbb{N}$. Továbbá
$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\ln f(\xi_n)}{\xi_n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{f(\xi_n) - 1}{\xi_n} \frac{\ln f(\xi_n)}{f(\xi_n) - 1} = -f'(0)\ln'(1) = -f'(0) \cdot 1 \in (0, +\infty),$$

hiszen f' seholsem nulla és f szigorúan monoton csökkenő. Így a Limit Comparison tétel alapján P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega)$ és $\sum_{n=1}^{\infty} - \ln f(\xi_n)(\omega)$ egyszerre konvergens, illetve divergens. Mivel

$$-\ln(f(\xi_n)) = -\ln\left(\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}\right) = -\big(\ln(\xi_{n+1}) - \ln(\xi_n)\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(-\ln(f(\xi_n))\Big) = -\big(\ln(\xi_n) - \ln(\xi_1)\big),$$

és így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\ln(f(\xi_n))\Big) = -\lim_{n\to\infty}(\ln(\xi_n) - \ln(\xi_1)) = +\infty.$$

Azaz $\sum_{n=1}^{\infty}(-\ln f(\xi_n)(\omega))$ divergens P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén, és ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega)$ is divergens P-m.m. $\omega \in \Omega$ esetén.

Megjegyezzük, hogy tulajdonképpen a következő analízisbeli állítást bizonyítottuk be. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan differenciálható függvény, melyre $f(0) = 1$, f és f' seholsem nulla $\mathbb{R}$-en. Legyen a_1 egy pozitív valós szám, és minden $n \geqslant 1$ esetén $a_{n+1} = a_n f(a_n)$. Mutassuk meg, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens. □

2.4.11. Feladat. Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók úgy, hogy $P(X_1 > 0) > 0$, (azaz $P(X_1 = 0) < 1$). Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n < x) < +\infty, \quad x \geqslant 0,$$

ahol $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Első megoldás. Legyen $P(X_1 = 0) := p$, ekkor $0 \leqslant p < 1$, és, ha $x = 0$, akkor $P(S_n < 0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ miatt triviálisan kapjuk az állítást. Legyen a továbbiakban $x > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
P(S_n < x) &= P\big(\{S_n < x\} \cap \big(\{X_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}\big)\big) \\
&\qquad + P\Big(\{S_n < x\} \cap \big(\Omega \setminus \big(\{X_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}\big)\big)\Big) \\
&= P\big(X_1 = 0, \dots, X_n = 0\big) + P\big(\{S_n < x\} \cap \big(\{X_1 > 0\} \cup \cdots \cup \{X_n > 0\}\big)\big) \\
&= p^n + P\Big(\big(\{S_n < x\} \cap \{X_1 > 0\}\big) \cup \big(\{S_n < x\} \cap \{X_2 > 0\}\big) \\
&\qquad\qquad \cup \cdots \cup \big(\{S_n < x\} \cap \{X_n > 0\}\big)\Big) \\
&\leqslant p^n + P(S_n < x, X_1 > 0) + \cdots + P(S_n < x, X_n > 0).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy az X_i-k nemnegatívak, kapjuk, hogy

$$P(S_n < x, X_1 > 0) \leqslant P(0 < X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x) = (F_{X_1}(x) - p)(F_{X_1}(x))^{n-1},$$

és hasonlóan becsülhető felülről az összes $P(S_n < x, X_1 > 0)$-típusú valószínűség is. Így

$$P(S_n < x) \leqslant p^n + n(F_{X_1}(x) - p)(F_{X_1}(x))^{n-1}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n < x) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p^n + (F_{X_1}(x) - p) \sum_{n=1}^{\infty} n(F_{X_1}(x))^{n-1} \\ &= \frac{p}{1-p} + (F_{X_1}(x) - p) \sum_{n=1}^{\infty} n(F_{X_1}(x))^{n-1}.\end{aligned}$$

Ismert, hogy ha $|y| < 1$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (y^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y^n\right)' = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \frac{1-y+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

Azt tudjuk, hogy $0 \leqslant F_{X_1}(x) \leqslant 1$ mindig teljesül, ezért, ha $x > 0$ olyan, hogy $F_{X_1}(x) < 1$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(F_{X_1}(x))^{n-1} = \frac{1}{(1 - F_{X_1}(x))^2}.$$

Tehát, ha $x > 0$ és $F_{X_1}(x) < 1$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n < x) \leqslant \frac{p}{1-p} + \frac{1}{(1 - F_{X_1}(x))^2} = \frac{p}{1-p} + \frac{1}{(P(X_1 \geqslant x))^2} < +\infty.$$

A továbbiakban legyen $x > 0$ és $F_{X_1}(x) = 1$. A következőkben Iglói Endre gondolatmenetét közöljük. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $P(S_k < x) < 1$. Mivel az X_n-ek nemnegatívak, létezik a várható értékük (véges vagy $+\infty$). Jelölje ezt a közös várható értéket μ. A nagy számok erős törvénye, illetve a 2.3.7. Feladat alapján $P(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu) = 1$. Tegyük fel indirekt módon, hogy bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén $P(S_k < x) = 1$. Ekkor

$$P\Big(\forall\, k \in \mathbb{N} : S_k < x\Big) = 1 \quad\Longrightarrow\quad P\Big(\forall\, k \in \mathbb{N} : \frac{S_k}{k} < \frac{x}{k}\Big) = 1 \quad\Longrightarrow\quad P\Big(\lim_{k\to\infty} \frac{S_k}{k} \leqslant 0\Big) = 1.$$

Mivel az X_n-ek nemnegatívak, kapjuk, hogy $\mu = 0$, és így $P(X_1 = 0) = 1$, ami pedig ellentmond a kiindulási feltételeknek.

Legyen a továbbiakban $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $P(S_k < x) < 1$. Ekkor $F_{S_k}(x) < 1$, így az $x > 0$, $F_{X_1}(x) < 1$ (már bizonyított) eset szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_{nk} < x) < +\infty.$$

(Másként mondva, a már bizonyítottakat alkalmazzuk X_1 helyett $X_1 + \cdots + X_k$-ra.) Mivel $k[\frac{j}{k}] \leqslant j$, az X_n-ek nemnegativitása miatt fennáll, hogy

$$P(S_j < x) \leqslant P(S_{k[\frac{j}{k}]} < x), \quad \text{ha } j \geqslant k.$$

Az $S_0 := 0$ jelöléssel élve $j = 1, \ldots, k-1$ esetén is teljesül a fenti egyenlőtlenség, a továbbiakban ezt vesszük alapul. Ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n < x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{k[\frac{n}{k}]} < x) = k - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} kP(S_{nk} < x) < +\infty.$$

Második megoldás. (Peter Becker-Kern megoldása) Először megmutatjuk, hogy létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy $P(X_1 \geqslant \varepsilon_0) := p > 0$. Tegyük fel ugyanis, hogy $P(X_1 \geqslant \varepsilon) = 0$ bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén. Ekkor a valószínűség folytonossága miatt

$$P(X_1 > 0) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{X_1 \geqslant 1/n\}\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 \geqslant 1/n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0,$$

és ezért $P(X_1 > 0) = 0$ lenne, ami ellentmond a kiindulási $P(X_1 > 0) > 0$ feltételnek.

Így létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy $P(X_1 \geqslant \varepsilon_0) := p > 0$. Legyen $x \geqslant 0$ rögzített. Ekkor létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n_0\varepsilon_0 > x$. Ezért

$$P(S_{n_0} \geqslant x) \geqslant P(S_{n_0} \geqslant n_0\varepsilon_0) \geqslant P(X_1 \geqslant \varepsilon_0, \ldots, X_{n_0} \geqslant \varepsilon_0) = p^{n_0}. \tag{2.4.32}$$

Így bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén, felhasználva, hogy az X_k-k nemnegatívak, függetlenek és azonos eloszlásúak,

$$\begin{aligned}
P(S_{kn_0} < x) &= P(S_{n_0} + (S_{2n_0} - S_{n_0}) + \cdots + (S_{kn_0} - S_{(k-1)n_0}) < x) \\
&\leqslant P(S_{n_0} < x, S_{2n_0} - S_{n_0} < x, \ldots, S_{kn_0} - S_{(k-1)n_0} < x) \\
&= P(S_{n_0} < x) P(X_{n_0+1} + \cdots + X_{2n_0} < x) \cdots P(X_{(k-1)n_0+1} + \cdots + X_{kn_0} < x) \\
&= P(S_{n_0} < x)^k.
\end{aligned}$$

Felhasználva (2.4.32)-ot kapjuk, hogy $P(S_{kn_0} < x) \leqslant (1 - p^{n_0})^k$, $k \in \mathbb{N}$. Mivel bármilyen $m \geqslant n$ esetén $P(S_m < x) \leqslant P(S_n < x)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n < x) &= \sum_{n=1}^{n_0-1} P(S_n < x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{m=kn_0}^{(k+1)n_0-1} P(S_m < x) \leqslant n_0 + n_0 \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_{kn_0} < x) \\
&\leqslant n_0 + n_0 \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p^{n_0})^k \leqslant n_0 \left(1 + \frac{1}{p^{n_0}}\right) < +\infty, \qquad x \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy az első megoldásból az is látszik, hogy bebizonyítottuk a következőket. Ha X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $1 = P(X_1 \geqslant 0) \geqslant P(X_1 > 0) > 0$, és $x \geqslant 0$ olyan valós szám, hogy $P(X_1 < x) < 1$, akkor

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n < x) \leqslant \frac{P(X_1 = 0)}{P(X_1 > 0)} + \frac{1}{P(X_1 \geqslant x)^2} < +\infty.$$

□

2.4.12. Feladat. Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók úgy, hogy $P(X_1 > 0) > 0$, (azaz $P(X_1 = 0) < 1$). Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \geqslant x) = +\infty, \quad x \geqslant 0,$$

ahol $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Megoldás. Mivel $P(X_1 \geqslant 0) = 1$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}X_1 \geqslant 0$ és $\mathbb{E}X_1 = 0$ akkor és csak akkor, ha $P(X_1 = 0) = 1$. Azonban a feltétel miatt $P(X_1 = 0) < 1$, és ezért $\mathbb{E}X_1 \neq 0$, amiből következik, hogy $\mathbb{E}X_1 > 0$. A nagy számok erős törvénye alapján

$$P\left(\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}X_1\right) = 1.$$

Ezért, az $S_n = n\frac{S_n}{n}$ felbontást tekintve, $P(S_n \to +\infty) = 1$. Ugyanis, egy $+\infty$-hez és egy pozitív valós számhoz tartó sorozat szorzatának határértéke $+\infty$. Legyen a továbbiakban $x \geqslant 0$ rögzített és

$$A := \{S_n \to +\infty\}, \qquad A_n := \{S_n \geqslant x\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor $P(A) = 1$, és, ha $\omega \in A$, akkor létezik olyan $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant n_0(\omega)$ esetén $S_n(\omega) \geqslant x$. Így

$$P\Big(\big\{\omega \in \Omega : S_n(\omega) \geqslant x \quad \text{végtelen sok} \quad n \in \mathbb{N}\text{-re}\big\}\Big) = 1,$$

azaz $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ lenne, akkor a Borel–Cantelli-lemma alapján $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ lenne, ami ellentmondás. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \geqslant x) = +\infty, \quad x \geqslant 0.$$

□

2.4.13. Megjegyzés. (Lévy-tétel) Legyenek $X_n, n \in \mathbb{N}$ független, szeparábilis Banach-térbeli értékű valószínűségi változók, $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor a következő állítások **ekvivalensek:**

(i) $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ P-majdnem mindenütt konvergens,

(ii) $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben konvergens,

(iii) $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ eloszlásban konvergens.

□

2.4.14. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = \infty$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy ekkor $P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty\Big) = 1$ vagy $P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = 1$ teljesül.

Megoldás. Megmutatjuk, hogy elég azt belátni, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty\Big) = 1.$$

Ez azzal az analízisbeli ténnyel függ össze, hogy ha $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ egy valós számsorozat és $\limsup_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{vagy} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

A teljesség kedvéért leírjuk ennek az indoklását is. Tegyük fel indirekt, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} x_n < +\infty \quad \text{és} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n > -\infty.$$

Mivel $\limsup_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, létezik olyan $\{x_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ részsorozata $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$-nek, melyre $\lim_{k\to\infty} |x_{n_k}| = +\infty$. Azonban, mivel $\limsup_{n\to\infty} x_n < +\infty$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n < +\infty$, és mivel $\liminf_{n\to\infty} x_n > -\infty$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n > -\infty$. Ezért $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$, és ez ellentmond annak, hogy van $+\infty$-hez konvergáló részsorozat.

Tegyük fel tehát, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty\Big) = 1.$$

Ekkor a $\limsup$ definíciója miatt

$$P\Big(\forall\, k \in \mathbb{N} : \frac{|S_n|}{n} > k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big) = 1.$$

Mivel

$$\Big\{\forall\, k \in \mathbb{N} : \frac{|S_n|}{n} > k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big\} \subseteq \Big\{\frac{|S_n|}{n} > k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big\}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

kapjuk, hogy

$$P\Big(\frac{|S_n|}{n} > k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big) = 1, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

És mivel minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\Big\{\frac{|S_n|}{n} > k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big\} &\subseteq \Big\{\frac{S_n}{n} > k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big\} \\ &\qquad \cup \Big\{\frac{S_n}{n} < -k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big\} \\ &\subseteq \{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > k\} \cup \{\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < -k\},\end{aligned}$$

kapjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$1 = P\Big(\frac{|S_n|}{n} > k \quad \text{végtelen sok } n\text{-re}\Big) \leqslant P\big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > k\big) + P\big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < -k\big). \tag{2.4.33}$$

Mivel $\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > k\}$ és $\{\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < -k\}$ benne vannak a $\sigma(\xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$ független σ-algebrákhoz tartozó farok σ-algebrában, a Kolmogorov 0-1 törvény alapján kapjuk, hogy bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > k\Big) \in \{0,1\} \quad \text{és} \quad P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < -k\Big) \in \{0,1\}. \tag{2.4.34}$$

Így (2.4.33) alapján, bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > k\Big) = 1 \quad \text{vagy} \quad P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < -k\Big) = 1. \tag{2.4.35}$$

A valószínűség folytonossága miatt

$$\begin{aligned} P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\Big) &= \lim_{k\to\infty} P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > k\Big), \\ P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) &= \lim_{k\to\infty} P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < -k\Big). \end{aligned} \tag{2.4.36}$$

A valószínűség monotonitása és (2.4.34) alapján

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\Big) \in \{0,1\} \quad \text{és} \quad P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) \in \{0,1\}.$$

És (2.4.36) alapján úgy lehet az előző két valószínűség egyszerre nulla, ha létezik olyan közös $k_0 \in \mathbb{N}$ index, hogy bármilyen $k \geqslant k_0$ esetén

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > k\Big) = 0 \quad \text{és} \quad P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < -\infty\Big) = 0.$$

Azonban ez ellentmond (2.4.35)-nek, és így

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\Big) = 1 \quad \text{vagy} \quad P\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = 1.$$

Most megmutatjuk, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty\Big) = 1.$$

A 2.3.9. Feladat nyomán tudjuk, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$ akkor és csak akkor, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi_1| \geqslant \varepsilon n) = +\infty.$$

Így, mivel a ξ_n-ek azonos eloszlásúak, kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty,$$

és így a Borel–Cantelli-lemma alapján (felhasználva, hogy ξ_n-ek függetlenek)

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\{|\xi_n| \geqslant \varepsilon n\}\Big) = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Azaz bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}\Big\{\frac{|\xi_k|}{k} \geqslant \varepsilon\Big\}\Big) = 1.$$

Ekkor felhasználva, hogy

$$|\xi_n| = |S_n - S_n + \xi_n| \leqslant |S_n| + |S_n - \xi_n| = |S_n| + |S_{n-1}|,$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}\Big\{\frac{|\xi_k|}{k} \geqslant \varepsilon\Big\} &\subseteq \Big\{\limsup_{n\to\infty}\frac{|\xi_n|}{n} \geqslant \varepsilon\Big\} \subseteq \Big\{\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n| + |S_{n-1}|}{n} \geqslant \varepsilon\Big\}\\
&\subseteq \Big\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n(\omega)|}{n} + \limsup_{n\to\infty}\frac{|S_{n-1}(\omega)|}{n} \geqslant \varepsilon\Big\}\\
&= \{2\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n} \geqslant \varepsilon\},
\end{aligned}$$

hiszen

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_{n-1}(\omega)|}{n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\frac{|S_{n-1}(\omega)|}{n-1} = \limsup_{n\to\infty}\frac{|S_{n-1}(\omega)|}{n-1}.$$

Ezért

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big) = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Így

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n} = +\infty\Big) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n} \geqslant k\Big) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$

Megjegyezzük, hogy érdemes összevetni ezt a feladatot a 2.3.7. Feladattal. Az itteni momentumfeltételből nem következik az ottani momentumfeltétel, s az ottani bizonyítás a nagy számok erős törvényére támaszkodik, az itteni pedig a Kolmogorov 0-1 törvényre.

Megjegyezzük azt is, hogy ha a ξ_n-ek közös eloszlása szimmetrikus is, akkor

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = +\infty\Big) = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad P\Big(\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = -\infty\Big) = 1.$$

A $(0,1)$-paraméterű Cauchy-eloszlásnál így mindkettő teljesül, erről szólt a 2.4.8. Feladat.
$\square$

2.4.15. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása:

$$P(X_1 = 1) = p, \qquad P(X_1 = 0) = 1 - p,$$

ahol $p \in (0,1)$. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$R_n := \begin{cases} \sup\Big\{k \geqslant 1 : X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{n+k-1} = 1\Big\} & \text{ha} \quad X_n = 1, \\ 0 & \text{ha} \quad X_n = 0. \end{cases}$$

(Azaz R_n az „n-edik pozícióban kezdődő tiszta 1-es sorozat hossza.") Mutassuk meg, hogy

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log n} = \frac{1}{|\log p|}\Big) = 1.$$

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Megmutatjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{R_n}{\log n} > \frac{1}{|\log p|} + \varepsilon\right) < +\infty. \tag{2.4.37}$$

Ekkor a Borel–Cantelli-lemma alapján következik majd, hogy $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$, ahol

$$A_n := \left\{\frac{R_n}{\log n} > \frac{1}{|\log p|} + \varepsilon\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Így az A_n, $n \in \mathbb{N}$ események közül 1-valószínűséggel csak véges sok következik be. Rátérünk most (2.4.37) bizonyítására. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P(A_n) = P\left(R_n > \log n\left(\frac{1}{|\log p|} + \varepsilon\right)\right) = \sum_{k=[\log n(\frac{1}{|\log p|}+\varepsilon)]+1}^{\infty} P(R_n = k)$$

$$= \sum_{k=[\log n(\frac{1}{|\log p|}+\varepsilon)]+1}^{\infty} p^k(1-p) = (1-p)\frac{p^{[\log n(\frac{1}{|\log p|}+\varepsilon)]+1}}{1-p} \leqslant p^{\log n(\frac{1}{|\log p|}+\varepsilon)},$$

hiszen p^x monoton csökkenő x-ben, mert $p \in (0,1)$, és $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p^{\log n(\frac{1}{|\log p|}+\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon \log p - 1} < +\infty,$$

ugyanis $\varepsilon \log p - 1 < -1$.

Azt kellene még belátnunk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén az

$$B_n := \left\{\frac{R_n}{\log n} > \frac{1}{|\log p|} - \varepsilon\right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

események közül 1-valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik. Itt feltehető, hogy $\varepsilon < \frac{1}{|\log p|}$. Megjegyezzük, hogy ehhez nem elég belátni, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{R_n}{\log n} > \frac{1}{|\log p|} - \varepsilon\right) = +\infty,$$

ugyanis a Borel–Cantelli-lemma nem alkalmazható, mert B_n, $n \in \mathbb{N}$ nem független események. A következő gondolatmenet Móri Tamástól származik. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$a_n := [\log_{\frac{1}{p}} n] \qquad \text{és} \qquad S_n := a_1 + \cdots + a_n.$$

Ekkor $S_n \leqslant n \log_{\frac{1}{p}} n$, és megmutatjuk, hogy

$$S_{n+1} - S_n > (1-\varepsilon) \log_{\frac{1}{p}} S_n, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

Ez utóbbihoz elég belátni, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{\log_{\frac{1}{p}} S_n} \geqslant 1.$$

Végezzük el az becsléseket:

$$\begin{aligned}
\frac{S_{n+1} - S_n}{\log_{\frac{1}{p}} S_n} &= \frac{a_{n+1}}{\log_{\frac{1}{p}} S_n} \geqslant \frac{a_{n+1}}{\log_{\frac{1}{p}} (n \log_{\frac{1}{p}} n)} = \frac{a_{n+1}}{\log_{\frac{1}{p}} n + \log_{\frac{1}{p}} (\log_{\frac{1}{p}} n)} \\
&\geqslant \frac{\log_{\frac{1}{p}}(n+1) - 1}{\log_{\frac{1}{p}} n + \log_{\frac{1}{p}} (\log_{\frac{1}{p}} n)} = \frac{\log_{\frac{1}{p}} n + \log_{\frac{1}{p}}(n+1) - \log_{\frac{1}{p}} n - 1}{\log_{\frac{1}{p}} n + \log_{\frac{1}{p}} (\log_{\frac{1}{p}} n)} \\
&= \frac{\log_{\frac{1}{p}} n + \log_{\frac{1}{p}}(\frac{n+1}{n}) - 1}{\log_{\frac{1}{p}} n + \log_{\frac{1}{p}} (\log_{\frac{1}{p}} n)}.
\end{aligned}$$

Így

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{\log_{\frac{1}{p}} S_n} \geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\log_{\frac{1}{p}} n}{\log_{\frac{1}{p}} n + \log_{\frac{1}{p}} (\log_{\frac{1}{p}} n)} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\log_{\frac{1}{p}} (\log_{\frac{1}{p}} n)}{\log_{\frac{1}{p}} n}} = 1,$$

hiszen a $\mathcal{L}$'Hospital-szabály alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{\frac{1}{p}} (\log_{\frac{1}{p}} n)}{\log_{\frac{1}{p}} n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log_{\frac{1}{p}} n \log \frac{1}{p}} = 0.$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$C_n := \big\{X_{S_n} = X_{S_n+1} = \cdots = X_{S_{n+1}-1} = 1\big\}.$$

Ekkor C_n, $n \in \mathbb{N}$, független események és

$$P(C_n) = p^{S_{n+1} - S_n} = p^{a_{n+1}} \geqslant p^{\log_{\frac{1}{p}}(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

Így $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = +\infty$, és a Borel–Cantelli-lemma (másik iránya) alapján

$$P(\limsup_{n\to\infty} C_n) = 1,$$

azaz 1-valószínűséggel végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re teljesül C_n. Felhasználva, hogy minden $\omega \in C_n$ esetén, ha n elég nagy

$$R_{S_n}(\omega) \geqslant S_{n+1} - S_n > (1-\varepsilon)\log_{\frac{1}{p}} S_n,$$

kapjuk, hogy 1-valószínűséggel végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re teljesül, hogy $R_{S_n} > (1-\varepsilon)\log_{\frac{1}{p}} S_n$. Mivel

$$\frac{R_{S_n}}{\log_{\frac{1}{p}} S_n} = \frac{R_{S_n}}{\log S_n}\log\frac{1}{p} = \frac{R_{S_n}}{\log S_n}|\log p|,$$

kapjuk, hogy 1-valószínűséggel végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re fennáll, hogy

$$\frac{R_{S_n}}{\log S_n} > (1-\varepsilon)\frac{1}{|\log p|} = \frac{1}{|\log p|} - \frac{\varepsilon}{|\log p|}.$$

Ebből már következik, hogy a B_n, $n \in \mathbb{N}$ események közül is 1-valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik. □

2.4.16. Feladat. (Székely [15], 190. old.) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $P(X_1 = 0) < 1$ és $\mathbb{E}X_1 = 0$. Ekkor

$$P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1.$$

(Ez K. L. Chung és W. H. J. Fuchs egy tétele 1951-ből.) Azonban, ha X_i-k nem azonos eloszlásúak, akkor nem marad érvényben ez a tulajdonság. Adjunk erre egy (ellen)példát!

Megoldás. Legyenek Y_n, $n \in \mathbb{N}$ független valószínűségi változók, hogy

$$P\left(Y_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad P\left(Y_n = -n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2},$$

és legyen

$$X_n := \frac{Y_n}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor X_n, $n \in \mathbb{N}$ függetlenek és

$$\mathbb{E}X_n = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + \left(-n+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\cdot 0 = 0,$$

illetve

$$\mathbb{D}^2 X_n = \mathbb{E}X_n^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\left(\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + \left(-n+\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Y_n = -n + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

a Borel–Cantelli-lemma alapján kapjuk, hogy

$$P\big(\limsup_{n\to\infty}\{Y_n = -n + 1/n\}\big) = 0.$$

Így létezik olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény, hogy $P(A) = 1$ és bármilyen $\omega \in A$ esetén létezik olyan $N(\omega) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geqslant N(\omega)$ esetén $Y_n(\omega) = 1/n$, azaz $X_n(\omega) = 1/\sqrt{n^2-1}$, ha $n \geqslant N(\omega)$. Így $\forall\ \omega \in A, \forall\, n \geqslant N(\omega)$ esetén

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)-1} X_k(\omega) + \sum_{k=N(\omega)}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}},$$

azaz $\forall\ \omega \in A, \forall\, n \geqslant N(\omega)$ esetén

$$S_n(\omega) \geqslant \sum_{k=1}^{N(\omega)-1} X_k(\omega) + \sum_{k=N(\omega)}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow +\infty, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Ezért $P(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$, és így $P(\liminf_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$. □

2.4.17. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ és $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor $h(\xi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(\xi)$.

Megoldás. Egy előadásbeli tétel alapján

$$\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}f(\xi_n) \to \mathbb{E}f(\xi) \quad \forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{korlátos, folytonos függvényre,}$$

illetve

$$h(\xi_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(\xi) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}g(h(\xi_n)) \to \mathbb{E}g(h(\xi)) \quad \text{\$}\forall\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{korlátos, folytonos függvényre.}$$

Így, ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy korlátos, folytonos függvény, akkor $g \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is korlátos, folytonos függvény, és ezért a fentiek miatt kapjuk az állítást.

Megjegyezzük, hogy nem kell feltennünk, hogy h korlátos. □

2.4.18. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x\Big) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ e^{-1/(\pi x)} & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

Megoldás. Ekkor

$$
\begin{aligned}
P\Big(\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k < x\Big) &= P\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k < nx\Big) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_k < nx\}\right) \\
&= (P(\xi_1 < nx))^n = \left(\int_{-\infty}^{nx}\frac{1}{\pi(1+t^2)}\,\mathsf{d}t\right)^n = \Big(\Big[\frac{1}{\pi}\arctan t\Big]_{-\infty}^{nx}\Big)^n \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Mivel $\arctan x > -\pi/2$, $x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2} > 0$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, így vehetjük $(\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2})^n$ logaritmusát. A logaritmus, illetve az exponenciális függvény folytonossága miatt elég azt megmutatni, hogy

$$
\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\infty & \text{ha } \ x\leqslant 0,\\ -\frac{1}{\pi x} & \text{ha } \ x>0. \end{cases}
$$

Ha $x<0$, akkor

$$
\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2}\right) = -\infty,
$$

hiszen egy $+\infty$-hez, ill. egy $-\infty$-hez tartozó sorozat szorzatának határértéke $-\infty$.

Ha $x=0$, akkor

$$
\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2}\right) = \Big(\lim_{n\to\infty} n\Big)\ln\frac{1}{2} = -\infty.
$$

Ha $x>0$, akkor a szóbanforgó határérték $+\infty\cdot 0$ típusú, ezért a $\mathcal{L}$'Hospital szabályt alkalmazzuk a határérték kiszámításakor:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2}\right)}{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{1}{\pi}\arctan(nx)+\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi(1+(nx)^2)}x}{-1/n^2} = -\frac{x}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+(nx)^2} = -\frac{1}{\pi x}.
\end{aligned}
$$

□

2.5. Karakterisztikus függvények, folytonossági tétel, gyenge konvergencia

2.5.1. Feladat. Melyek karakterisztikus függvények az alábbiak közül:

(a) $\frac{1}{1+t^2}$, $t\in\mathbb{R}$,

(b) e^{-t^4}, $t\in\mathbb{R}$,

(c) $\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

(d) $\cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

(e) $\frac{1+\cos(t)}{2}$, $t \in \mathbb{R}$?

Megoldás. (a): A válasz: **Igen.** Azt ellenőrizzük le, hogy ha ξ sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, akkor $\varphi_\xi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, azaz így közvetlenül megkapjuk, hogy $\frac{1}{1+t^2}$ karakterisztikus függvény. Ugyanis

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(it+1)x}\,\mathsf{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{(it-1)x}\,\mathsf{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(it+1)x}}{it+1}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(it-1)x}}{it-1}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2(it+1)} - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2(it+1)}e^{(it+1)x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(it-1)}e^{(it-1)x} - \frac{1}{2(it-1)} \\
&= \frac{1}{2(it+1)} - \frac{1}{2(it-1)},
\end{aligned}$$

hiszen

$$|e^{(it+1)x}| = e^{x} \to 0, \quad \text{ha } x \to -\infty, \quad \text{és} \quad |e^{(it-1)x}| = e^{-x} \to 0, \quad \text{ha } x \to +\infty.$$

És így

$$\varphi_\xi(t) = \frac{it-1-it-1}{2(it+1)(it-1)} = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b): A válasz: **Nem.** Pedig e^{-t^4} folytonos és a 0-ban 1-et vesz fel. Tanultuk ugyanis elméletből, hogy ha létezik $\varphi_\xi^{(2n)}(0) \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}\xi^{2n} < +\infty$. Jelen esetben, $n = 1$-el

$$\varphi_\xi^{(2)}(0) = (e^{-t^4})''|_{t=0} = (e^{-t^4}(-4t^3))'|_{t=0} = \Big(e^{-t^4}(-4t^3)^2 + e^{-t^4}(-12t^2)\Big)|_{t=0} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Így $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$. Szintén elméletből tanultuk, hogy

$$\frac{\varphi_\xi^{(2)}(0)}{i^2} = \mathbb{E}\xi^2,$$

és így $\mathbb{E}\xi^2 = 0/i^2 = 0$. Mivel $P(\xi^2 \geqslant 0) = 1$, kapjuk, hogy $P(\xi = 0) = 1$. Ez azonban ellentmondás, mert ekkor $\varphi_\xi(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$ lenne.

Megjegyezzük, hogy a feladatban szereplő dolog általánosabban is igaz. Ha egy $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény $e^{p(t)}$ alakú, ahol $p(t)$ polinom, akkor $p(t)$ fokszáma legfeljebb 2 (ez Marcinkiewicz-tétele).

(c): A válasz: **Nem.** Ugyanis, $\sin 0 = 0 \neq 1$.

(d): A válasz: **Igen.** Ugyanis, ha ξ eloszlása

$$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2},$$

akkor

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos t + i\sin t + \cos t - i\sin t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(e): A válasz: **Igen.** Ugyanis a (d) feladat nyomán $\frac{1}{2}\cos t$, $t \in \mathbb{R}$ pozitív szemidefinit, így az $\frac{1}{2}(1+\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ függvény is pozitív szemidefinit. Valóban, bármilyen $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ esetén az azonosan $\frac{1}{2}$ függvény pozitív szemidefinit, mert

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 \geqslant 0.$$

Mivel $\frac{1}{2}(1+\cos t)$ folytonos és 0-ban 1-et vesz fel, kapjuk, hogy karakterisztikus függvény. Minek a karakterisztikus függvénye $\frac{1}{2}(1+\cos t)$? Mivel $\frac{1}{2}(1+\cos t) \in \mathbb{R}$, ξ szimmetrikus kell, hogy legyen. Mivel

$$\frac{1}{2}(1+\cos t) = \mathsf{Re}\left(\frac{1}{2}(1+\cos t)\right) = \mathsf{Re}\left(\frac{1}{2}e^{it0} + \frac{1}{2}e^{it}\right) = \frac{1}{2}e^{it0} + \frac{1}{4}e^{it} + \frac{1}{4}e^{-it}.$$

Így, ha ξ eloszlása

$$P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{4}, \qquad P(\xi = 0) = \frac{1}{2},$$

akkor

$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{2}e^{i0t} + \frac{1}{4}e^{i1t} + \frac{1}{4}e^{i(-1)t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

2.5.2. Feladat. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, η pedig (m, σ^2)-paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, ahol $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$. Határozzuk meg ξ és η karakterisztikus függvényét!

Megoldás. Először ξ karakterisztikus függvényét határozzuk meg:

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it\xi)^n}{n!}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it\xi)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\frac{(it\xi)^n}{n!}\right).$$

Azt ellenőrizzük le, hogy a dominált konvergencia tétel feltételei teljesülnek az $\eta_k := \sum_{n=0}^{k} \frac{(it\xi)^n}{n!}$, $k \in \mathbb{N}$, sorozatra. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén

$$\left| \sum_{n=0}^{k} \frac{(it\xi(\omega))^n}{n!} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{k} \frac{|t\xi(\omega)|^n}{n!} \leqslant e^{|t\xi(\omega)|},$$

és megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{E}e^{|t\xi|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|tx| - \frac{x^2}{2}} \, \mathsf{d}x < +\infty.$$

Valóban, ha $t \geqslant 0$, úgy

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|tx| - \frac{x^2}{2}} \, \mathsf{d}x &= \int_{-\infty}^{0} e^{-tx - \frac{x^2}{2}} \, \mathsf{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}} \, \mathsf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + 2tx)} \, \mathsf{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx)} \, \mathsf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}((x+t)^2 - t^2)} \, \mathsf{d}x + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}((x-t)^2 - t^2)} \, \mathsf{d}x \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}} \, \mathsf{d}x + e^{\frac{t^2}{2}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \, \mathsf{d}x \\
&\leqslant e^{\frac{t^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}} \, \mathsf{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \, \mathsf{d}x \right).
\end{aligned}$$

Így, ha $t \geqslant 0$

$$\mathbb{E}e^{|t\xi|} \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}(1 + 1) = 2e^{\frac{t^2}{2}} < +\infty.$$

(A $t < 0$ eset hasonlóan kezelhető.) Ezért

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{(it\xi)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}\xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} (2n-1)!!,$$

ugyanis

$$\mathbb{E}\xi^n = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (n-1) = (n-1)!! & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Így

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot (2n)}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Felhasználva, hogy $\frac{\eta - m}{\sigma}$ standard normális eloszlású, kapjuk, hogy

$$\varphi_{\frac{\eta - m}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ezért

$$\mathbb{E}\left(e^{it\frac{\eta - m}{\sigma}} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left(e^{i\frac{t}{\sigma}\eta} \right) = e^{-\frac{t^2}{2} + i\frac{t}{\sigma}m}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Így a $t = \sigma v$, $v \in \mathbb{R}$, helyettesítéssel élve

$$\varphi_\eta(v) = \mathbb{E} e^{iv\eta} = \exp\left\{imv - \frac{\sigma^2 v^2}{2}\right\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

□

2.5.3. Feladat. Legyen ξ (λ, p)-paraméterű Γ-eloszlású valószínűségi változó, ahol $\lambda > 0$ és $p > 0$. Határozzuk meg ξ karakterisztikus függvényét!

Első megoldás. (Csak arra az esetre vonatkozik, mikor $p \geqslant 1$.) Legyen $p \geqslant 1$. Ekkor

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

illetve

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \int_0^{+\infty} e^{itx} \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)} \, \mathsf{d}x = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-(\lambda - it)x} \, \mathsf{d}x.$$

A $z = (\lambda - it)x$ helyettesítéssel

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_L \frac{z^{p-1}}{(\lambda - it)^{p-1}} e^{-z} \frac{1}{\lambda - it} \, \mathsf{d}z = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p)} \int_L z^{p-1} e^{-z} \, \mathsf{d}z,$$

ahol L jelöli a komplex sík $\{(\lambda - it)x : x \geqslant 0\}$ félegyenesét. Tekintsük a 8. ábrán látható zárt görbét.

Mivel $p \geqslant 1$, a $z \in \mathbb{C} \mapsto z^{p-1} e^{-z}$ függvény analitikus, így a fenti zárt görbén az integrálja 0. (Megjegyezzük, ha $0 < p < 1$, akkor csak az igaz, hogy a $z \in \mathbb{C} \mapsto z^{p-1} e^{-z}$ függvény analitikus bármilyen olyan tartományon, amely nem tartalmazza a nullát.) Felírjuk most analitikusan a K_{r_0} és L_{r_0} görbéket. A K_{r_0} irányított szakasz két végpontja az $x^2 + y^2 = r_0^2$ egyenletű körnek az x tengellyel, ill. az L egyenessel való metszéspontjai. Az L egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} y - (-t) &= -\frac{t}{\lambda}(x - \lambda), \\ y &= -\frac{t}{\lambda} x + t - t = -\frac{t}{\lambda} x. \end{aligned}$$

Így meg kell oldanunk az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r_0^2, \\ y &= -\frac{t}{\lambda} x \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ekkor

$$x^2 = r_0^2 \frac{1}{1 + \frac{t^2}{\lambda^2}} = \frac{r_0^2 \lambda^2}{\lambda^2 + t^2},$$

és mivel az ábra alapján $x > 0$, kapjuk, hogy

$$x = \frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}, \qquad \text{és} \qquad y = -\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}.$$

Így K_{r_0} az $(r_0, 0)$ és

$$\left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}, -\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right)$$

pontokat összekötő szakasz, ezért paraméteres előállítása

$$\begin{aligned} y \in [0,1] \ \mapsto (r_0, 0) + y\left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - r_0, -\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right) \\ = r_0 + y\left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - r_0\right) - iy\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}. \end{aligned}$$

Hasonlóan, L_{r_0} paraméteres előállítása:

$$\begin{aligned} y \in [0,1] \ \mapsto \left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}, -\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right) + y\left(-\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}, \frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right) \\ = \frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - y\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} + i\left(-\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} + y\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right). \end{aligned}$$

Így

$$0 = \int_0^{r_0} x^{p-1}e^{-x}\,\mathsf{d}x + \int_{K_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z + \int_{L_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z,$$

és

$$\begin{aligned} \int_{K_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z = \int_0^1 & \left[r_0 + y\left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - r_0\right) - iy\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right]^{p-1} \\ & \times \exp\left\{-r_0 - y\left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - r_0\right) + iy\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right\} \\ & \times \left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - r_0 - i\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right)\,\mathsf{d}y. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} \left|\int_{K_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z\right| \leqslant \int_0^1 & \left|r_0 + y\left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - r_0\right) - iy\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right|^{p-1} \\ & \times \exp\left\{r_0\left[-1 - y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - 1\right)\right]\right\} \\ & \times r_0\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - 1\right)^2 + \frac{t^2}{\lambda^2+t^2}}\,\mathsf{d}y. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy zárt görbénk konstrukciója miatt

$$\left| r_0 + y\left(\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}} - r_0\right) - iy\frac{tr_0}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right|^{p-1} \leqslant r_0^{p-1},$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\left|\int_{K_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z\right| &\leqslant e^{-r_0}r_0^p\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}-1\right)^2+\frac{t^2}{\lambda^2+t^2}}\int_0^1 \exp\left\{-r_0y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}-1\right)\right\}\,\mathsf{d}y\\
&= e^{-r_0}r_0^p\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}-1\right)^2+\frac{t^2}{\lambda^2+t^2}}\left[\frac{\exp\left\{-r_0y\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}-1\right)\right\}}{-r_0\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}-1\right)}\right]_{y=0}^{y=1}\\
&= -C\left(\frac{r_0^{p-1}}{e^{\frac{r_0\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}}} - \frac{r_0^{p-1}}{e^{r_0}}\right),
\end{aligned}$$

ahol

$$C := \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}-1\right)^2+\frac{t^2}{\lambda^2+t^2}}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}-1\right)^{-1}.$$

Ha megmutatjuk, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ és $b > 0$ esetén

(2.5.38)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^{bx}} = 0,$$

akkor már következik, hogy

$$\lim_{r_0\to\infty}\left|\int_{K_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z\right| = 0,$$

azaz

$$\lim_{r_0\to\infty}\int_{K_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z = 0.$$

A $\mathcal{L}$'Hospital szabály többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{e^{bx}} = \lim_{x\to\infty}\frac{ax^{a-1}}{be^{bx}} = \cdots = 0.$$

Így

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,\mathsf{d}x = -\lim_{r_0\to\infty}\int_{L_{r_0}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z = \int_L z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z,$$

ugyanis, ha γ_1, illetve γ_2 az A pontot a B ponttal, illetve a B pontot az A ponttal összekötő görbék, paraméteresen

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: t \in [0,1] \mapsto A + t(B-A),\\
\gamma_2 &: t \in [-1,0] \mapsto A + t(A-B),
\end{aligned}$$

akkor minden $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mérhető függvényre

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathsf{d}z &= \int_0^1 f(A + t(B - A))(B - A)\,\mathsf{d}t, \\
\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathsf{d}z &= \int_{-1}^0 f(A + t(A - B))(A - B)\,\mathsf{d}t = \int_1^0 f(A + y(B - A))(A - B)(-1)\,\mathsf{d}y \\
&= \int_0^1 f(A + y(B - A))(A - B)\,\mathsf{d}y,
\end{aligned}$$

és így

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathsf{d}z = -\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathsf{d}z.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,\mathsf{d}x = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^p \int_0^{+\infty} \frac{1^p x^{p-1} e^{-x}}{\Gamma(p)}\,\mathsf{d}x \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^p = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-p}.
\end{aligned}$$

Második megoldás. (**$p > 0$ tetszőleges**) Ekkor

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

illetve

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \int_0^{+\infty} e^{itx} \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(p)}\,\mathsf{d}x = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-(\lambda - it)x}\,\mathsf{d}x.$$

A $z = (\lambda - it)x$ helyettesítéssel

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int_L \frac{z^{p-1}}{(\lambda - it)^{p-1}} e^{-z} \frac{1}{\lambda - it}\,\mathsf{d}z = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^p \frac{1}{\Gamma(p)} \int_L z^{p-1} e^{-z}\,\mathsf{d}z,$$

ahol L jelöli a komplex sík $\{(\lambda - it)x : x \geqslant 0\}$ félegyenesét. Mivel most $0 < p < 1$ is lehet, csak az igaz, hogy a $z \in \mathbb{C} \mapsto z^{p-1}e^{-z}$ függvény analitikus bármilyen olyan tartományon, amely nem tartalmazza a nullát. Azért, hogy a nullát elkerüljük tekintsük a 9. ábrán látható zárt görbét.

A reziduum-tétel alapján a fenti zárt görbén $z^{p-1}e^{-z}$ integrálja 0. Felírjuk most analitikusan a K_1, K_2 és $L_{r,\varepsilon}$ görbéket. Legyen a továbbiakban $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ olyan, hogy $\tan(\alpha) = -\frac{t}{\lambda}$. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $\alpha \geqslant 0$ (az $\alpha \leqslant 0$ eset hasonlóan tárgyalható). Ekkor K_1, illetve K_2 paraméteres előállítása:

$$K_1 : t \in [0, \alpha] \mapsto re^{it}, \qquad K_2 : t \in [-\alpha, 0] \mapsto \varepsilon e^{-it}.$$

Az első megoldás alapján $L_{r,\varepsilon}$ két végpontja:

$$\left(\frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}},-\frac{t\varepsilon}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{r\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}},-\frac{tr}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right).$$

Így $L_{r,\varepsilon}$ paraméteres előállítása:

$$y\in[0,1]\mapsto \left(\frac{r\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}},-\frac{tr}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right)+y\left(\frac{(\varepsilon-r)\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}},\frac{(r-\varepsilon)\lambda}{\sqrt{\lambda^2+t^2}}\right).$$

Ezért

$$0=\int_\varepsilon^r x^{p-1}e^{-x}\,\mathsf{d}x+\int_{K_1} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z+\int_{L_{r,\varepsilon}} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z+\int_{K_2} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{r\to\infty}\int_{K_1} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z=0,\quad \text{és}\quad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{K_2} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z=0. \tag{2.5.39}$$

Ekkor

$$\int_{K_1} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z=\int_0^\alpha (re^{it})^{p-1}e^{-re^{it}}re^{it}i\,\mathsf{d}t,$$

és így

$$\left|\int_{K_1} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z\right|\leqslant\int_0^\alpha r^pe^{-r\cos(t)}\,\mathsf{d}t.$$

Felhasználva, hogy $\cos(t)\geqslant-\frac{2}{\pi}t+1,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|\int_{K_1} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z\right|&\leqslant r^p\int_0^\alpha e^{-r(-\frac{2}{\pi}t+1)}\,\mathsf{d}t=\frac{r^p}{e^r}\left[\frac{e^{2rt/\pi}}{2r/\pi}\right]_0^\alpha=\frac{r^p}{e^r}\frac{\pi}{2r}\left(e^{2r\alpha/\pi}-1\right)\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^{p-1}}{e^{(1-2\alpha/\pi)r}}-\frac{r^{p-1}}{e^r}\right).\end{aligned}$$

Mivel $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, kapjuk, hogy $(1-\frac{2\alpha}{\pi})\in(0,2)$, és így (2.5.38) alapján

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^{p-1}}{e^{(1-2\alpha/\pi)r}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^{p-1}}{e^r}=0.$$

Ezért (2.5.39) első fele teljesül. Hasonlóan

$$\int_{K_2} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z=\int_{-\alpha}^0(\varepsilon e^{-it})^{p-1}e^{-\varepsilon e^{-it}}\varepsilon e^{-it}(-i)\,\mathsf{d}t,$$

és így

$$\left|\int_{K_2} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z\right|\leqslant\int_{-\alpha}^0\varepsilon^pe^{-\varepsilon\cos(t)}\,\mathsf{d}t=\int_0^\alpha\varepsilon^pe^{-\varepsilon\cos(t)}\,\mathsf{d}t.$$

Mivel $t\in[0,\alpha)$ esetén $0\leqslant\cos(t)\leqslant1$,

$$\left|\int_{K_2} z^{p-1}e^{-z}\,\mathsf{d}z\right|\leqslant\int_0^\alpha\varepsilon^p\,\mathsf{d}t=\alpha\varepsilon^p.$$

Mivel $p > 0$, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^p = 0$, így (2.5.39) második része is teljesül.

Megjegyezzük, hogy (2.5.39)-t egyszerűbben is beláthatjuk. Ugyanis,

$$\left| \int_{K_1} z^{p-1} e^{-z} \, \mathsf{d}z \right| \leqslant 2\pi r \max_{z\in K_1} |z^{p-1} e^{-z}| = 2\pi r \cdot r^{p-1} \max_{z\in K_1} e^{-\mathsf{Re}\, z} \leqslant 2\pi r^p e^{-r\cos(\alpha)},$$

ugyanis $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ és így $\mathsf{Re}\, z \geqslant r\cos(\alpha)$, ha $z \in K_1$. Mivel $\cos(\alpha) > 0$, ha $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, (2.5.38) alapján $\lim_{r\to\infty} r^p e^{-r\cos(\alpha)} = 0$, és így kapjuk, hogy (2.5.39) első fele teljesül. Hasonlóan okoskodhatunk (2.5.39) második felét illetően.

Ezért

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, \mathsf{d}x = \lim_{r\to\infty,\, \varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^r x^{p-1} e^{-x} \, \mathsf{d}x = \lim_{r\to\infty,\, \varepsilon\downarrow 0} \int_{L_{r,\varepsilon}} z^{p-1} e^{-z} \, \mathsf{d}z = \int_L z^{p-1} e^{-z} \, \mathsf{d}z,$$

ugyanazon okok miatt, mint amik a $p \geqslant 1$ eset indoklásában részletesen leírásra kerültek. S ugyanúgy fejezhetjük be ezt a levezetést, mint az első megoldásban. □

2.5.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy két független, azonos eloszlású valószínűségi változó különbsége nem lehet a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású.

Megoldás. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel indirekt, hogy $X - Y$ eloszása a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású. Ekkor

$$\varphi_{X-Y}(t) = \mathbb{E}e^{it(X-Y)} = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \varphi_X(t)\varphi_X(-t) = \varphi_X(t)\overline{\varphi_X(t)} = |\varphi_X(t)|^2 \geqslant 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Továbbá, ha $t \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}\varphi_{U(-1,1)}(t) &= \int_{-1}^{1} e^{itx} \frac{1}{2} \, \mathsf{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{itx}}{it} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2it}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2it}(\cos t + i\sin t - \cos t + i\sin t) \\ &= \frac{1}{t}\sin t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ha pedig $t = 0$, akkor $\varphi_{U(-1,1)}(0) = 1$.

Azonban, ha $t \in (\pi, 2\pi)$, akkor $\varphi_{U(-1,1)}(t) < 0$ és $\varphi_{X-Y}(t) \geqslant 0$, és így nem lehetnek egyenlőek, azaz ellentmondásra jutottunk. □

2.5.5. Feladat. Mutassuk meg egy példával, hogy abból, hogy valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő a tagok karakterisztikus függvényeinek szorzatával, nem következik a tagok függetlensége.

Megoldás. A 2.4.5. Feladat alapján tudjuk, hogy ha ξ $(0, 1)$-paraméterű Cauchy-eloszlású, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi_\xi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\varphi_{\xi+\xi}(t) = \varphi_{2\xi}(t) = \varphi_\xi(2t) = e^{-|2t|} = e^{-|t|}e^{-|t|} = \varphi_\xi(t)\varphi_\xi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

de nyilván ξ nem független önmagától. □

2.5.6. Feladat. Legyen ξ az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg ξ karakterisztikus függvényét!

Megoldás. Ha $t = 0$, akkor $\varphi_\xi(0) = 1$. Ha pedig $t \neq 0$, akkor

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{it(b-a)}(e^{itb} - e^{ita}).$$

□

2.5.7. Feladat. (Rényi [2], 2.8.30.) Interpretáljuk karakterisztikus függvények segítségével a

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \neq 0,\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{azonosságot!}$$

Megoldás. Az azonosság „hagyományos" úton könnyen igazolható, hiszen

$$\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Legyenek X és Y olyan független valószínűségi változók, hogy X egyenletes eloszlású a $(-1/2, 1/2)$ intervallumon és

$$P(Y = \frac{1}{2}) = P(Y = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Megmutatjuk, hogy a baloldal $X + Y$ karakterisztikus függvénye, a jobboldal pedig X karakterisztikus függvénye megszorozva Y karakterisztikus függvényével, és így a kettő tényleg egyenlő, mert X és Y függetlenek.

Az előző feladat szerint

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{it1}(e^{it/2} - e^{-it/2}) = \frac{1}{it}\Big(\cos(t/2) + i\sin(t/2) - \cos(t/2) + i\sin(t/2)\Big)\\ &= \frac{2\sin(t/2)}{t} = \frac{\sin(t/2)}{t/2},\end{aligned}$$

továbbá

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{2}e^{it/2} + \frac{1}{2}e^{-it/2} = \frac{1}{2}\Big(\cos(t/2) + i\sin(t/2) + \cos(t/2) - i\sin(t/2)\Big) = \cos(t/2).$$

Megmutatjuk majd, hogy $X + Y$ egyenletes eloszlású a $(-1, 1)$ intervallumon, és így az előző feladat nyomán következik majd, hogy

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{1}{2it}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2it}(\cos t + i\sin t - \cos t + i\sin t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Rátérünk annak igazolására, hogy $X + Y$ egyenletes eloszlású a $(-1, 1)$ intervallumon. Nyilván, $P(X + Y \in (-1, 1)) = 1$, és így $P(X + Y < x) = 0$, ha $x \leqslant -1$, és $P(X + Y < x) = 1$, ha $x \geqslant 1$. Ha $x \in (-1, 1)$, akkor

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(x) &= P(X + Y < x) = P(X + Y < x, Y = -1/2) + P(X + Y < x, Y = 1/2)\\ &= P(X < x + 1/2, Y = -1/2) + P(X < x - 1/2, Y = 1/2).\end{aligned}$$

Ha $x \in (-1, 0)$, akkor

$$F_{X+Y}(x) = \frac{x + 1/2 + 1/2}{1} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1).$$

Ha $x \in (0, 1)$, akkor

$$F_{X+Y}(x) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{x - 1/2 + 1/2}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1).$$

Tehát

$$F_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant -1, \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{ha} \quad x \in (-1,1), \\ 1 & \text{ha} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

azaz $X + Y$ egyenletes eloszlású a $(-1, 1)$ intervallumon. □

2.5.8. Feladat. Bizonyítsuk be valószínűségszámítási úton, hogy

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right), \quad t \neq 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. Legyenek Y_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy a közös eloszlás

$$P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Tekintsük az

$$X := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{2^k} \qquad \text{valószínűségi változót.}$$

Ekkor X 1-valószínűséggel jól definiált, hiszen a Kolmogorov egy-sor tétel miatt, mivel $\mathbb{E}Y_1 = 0$ és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{D}^2\left(\frac{Y_k}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}\mathbb{D}^2 Y_1 = \frac{1/4}{1 - 1/4} < +\infty,$$

kapjuk, hogy

$$P\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{2^k} < +\infty\Big) = 1.$$

Megmutatjuk, hogy X egyenletes eloszlású a $(-1, 1)$ intervallumon. Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $X_k = \frac{1}{2}Y_k + \frac{1}{2}$. Ekkor X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlásúak és

$$P(X_k = 1) = P(X_k = 0) = \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Így

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2X_k - 1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k} - 1.$$

Ezért elég azt megmutatni, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k} := \widetilde{X}$ egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon, hiszen $2U(0,1) - 1 \sim U(-1,1)$. Tekintsük a

$$\xi_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{valószínűségi változókat.}$$

Ekkor $P(\xi_n \to \widetilde{X}) = 1$, és így $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \widetilde{X}$. Azaz $F_{\xi_n}(x) \to F_{\widetilde{X}}(x)$ minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban, ahol $F_{\widetilde{X}}$ folytonos. Mivel

$$0 \leqslant \xi_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n},$$

kapjuk, hogy ξ_n értékkészlete $\{\frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ és

$$P\Big(\xi_n = \frac{k}{2^n}\Big) = P\big(2^{n-1}X_1 + 2^{n-2}X_2 + \cdots + 2X_{n-1} + X_n = k\big) = \frac{1}{2^n},$$

hiszen k-t a 2-es alapú számrendszerben csak egyféleképpen lehet előállítani és X_i-k függetlenek. Ezért

$$F_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{k+1}{2^n} & \text{ha} \quad \frac{k}{2^n} < x \leqslant \frac{k+1}{2^n}, \ k = 0, \ldots, 2^n - 1, \\ 1 & \text{ha} \quad x > 1. \end{cases}$$

Így $F_{\xi_n}(x) \to 0$, ha $x \leqslant 0$, és $F_{\xi_n}(x) \to 1$, ha $x > 1$. Ha pedig $x \in (0,1]$, akkor bármilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $k_n \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, hogy

$$\frac{k_n}{2^n} < x \leqslant \frac{k_n + 1}{2^n}.$$

Ekkor $\frac{k_n+1}{2^n} \downarrow x$. Így $F_{\xi_n}(x) = \frac{k_n+1}{2^n}$, és $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = x$, ha $x \in (0,1]$. Összefoglalva,

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ x & \text{ha} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha} \quad x > 1. \end{cases}$$

Ezért $F_{\widetilde{X}}$ minden $x \in \mathbb{R}$ pontban folytonos és

$$F_{\widetilde{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ x & \text{ha} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha} \quad x > 1, \end{cases}$$

azaz $\widetilde{X}$ egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon.

Az előző feladat megoldásában látottak alapján $\varphi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, ami a baloldal a bizonyítandó azonosságban. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\eta_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{2^k},$$

ekkor $\eta_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, és a folytonossági tétel alapján

$$\varphi_{\eta_n}(t) \to \varphi_X(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad t \neq 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

(Ha $t = 0$, akkor triviálisan teljesül az előző határátmenet, $1 \to 1$.) Ekkor, felhasználva, hogy $Y_1, \ldots, Y_n$ függetlenek, kapjuk, hogy

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \mathbb{E}e^{it\eta_n} = \mathbb{E}\left(e^{it\sum_{k=1}^{n}\frac{Y_k}{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{Y_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right),$$

hiszen

$$\varphi_{Y_k}(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z, \quad z \in \mathbb{R},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Így

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \to \frac{\sin t}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

□

2.5.9. Feladat. (Rényi [2], 2.8.32.) Határozzuk meg valószínűségszámítási úton a következő integrál értékét:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \nu}{\nu}\right)^2 \cos(2x\nu)\,\mathsf{d}\nu, \quad x \in \mathbb{R},$$

ahol $\frac{\sin 0}{0} := 1$.

Megoldás. Legyenek X és Y független, a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a korábbiak alapján

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (\varphi_X(t))^2 = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Felhasználva, hogy (Rudin)

$$\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathsf{d}x = \frac{\pi}{2},$$

kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathsf{d}x = \frac{\pi}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathsf{d}x = \frac{\pi}{2} + \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathsf{d}x = \pi,$$

és így $\varphi_{X+Y} \in L^1(\mathbb{R})$. Az inverziós formula alapján $X+Y$ abszolút folytonos eloszlású és

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_{X+Y}(t)\,\mathsf{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathsf{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Felhasználva, hogy a konvolúciós képlet alapján $f_{X+Y}(x) \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$\mathsf{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathsf{d}t\right) = 0,$$

azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathsf{d}t = 0.$$

Így

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathsf{d}t, \quad x \in \mathbb{R},$$

és ezért

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \nu}{\nu}\right)^2 \cos(2x\nu)\,\mathsf{d}\nu = 2\pi f_{X+Y}(2x).$$

A 3.3.5. Feladat alapján, hogy ha ξ és η független, a $(-1/2, 1/2)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{ha} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Így $F_{X+Y}(x) = F_{2(\xi+\eta)}(x) = F_{\xi+\eta}(x/2)$, $x \in \mathbb{R}$, és ezért

$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2} f_{\xi+\eta}(x/2) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \left|\frac{x}{4}\right| & \text{ha} \quad |x| \leqslant 2, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

Mindezek miatt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \nu}{\nu}\right)^2 \cos(2x\nu)\,\mathsf{d}\nu &= \begin{cases} 2\pi\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{x}{2}\right|\right) & \text{ha} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| > 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \pi - \pi|x| & \text{ha} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re is megoldható az előző feladat, ekkor n db független, $(-1,1)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvényét kell meghatározni. Ez utóbbi dolgot először N. I. Lobacsevszkij határozta meg. Ezáltal akarta a csillagászati mérési hibákat megbecsülni annak eldöntése céljából, hogy vajon a világmindenségben az euklideszi, vagy a nem euklideszi geometria törvényei érvényesek. □

Az alábbiakban felidézzük a folytonossági tételt, amit a gyenge konvergencia bizonyításánál jól használhatunk.

Folytonossági tétel: Legyenek F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvények és φ_n, $n \in \mathbb{N}$ a megfelelő karakterisztikus függvények.

(i): Ha az F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvények gyengén konvergálnak egy F eloszlásfüggvényhez (azaz $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ teljesül minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban, ahol F folytonos), akkor

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol φ az F-hez tartozó karakterisztikus függvény. Ez utóbbi konvergencia minden véges intervallumban egyenletes.

(ii): Ha $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ahol φ a 0-ban folytonos függvény, akkor φ karakterisztikus függvény, és a hozzá tartozó F eloszlásfüggvényhez gyengén konvergál az F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvény sorozat.

2.5.10. Megjegyzés. A következőkben egy példát mutatunk arra, hogy az F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvények sorozatának a karakterisztikus függvényei egy, az origóban nem folytonos függvényhez konvergálnak. Ebben az esetben az F_n eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban egy eloszlásfüggvényhez. Így a folytonossági tétel (ii) részében az a megkötés, hogy a φ_n karakterisztikus függvények φ határfüggvénye az origóban folytonos függvény nem elhagyható feltétel.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen az F_n eloszlásfüggvény a $[-n, n]$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye. Ekkor az F_n-hez tartozó sűrűségfüggvény: $f_n(x) = \frac{1}{2n}$, ha $x \in [-n, n]$, és $f_n(x) = 0$, ha $|x| > n$. Ekkor ezek az F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban egy eloszlásfüggvényhez, mert az általuk meghatározott tömegeloszlás „kifolyik a végtelenben.” Formálisan azért nem teljesülhet az eloszlásban való konvergencia, mert bármilyen $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n_0 > x$, és ezért

$$F_n(x) = \frac{x+n}{2n}, \quad n \geqslant n_0.$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ugyanakkor, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_n(t) = \int_{-n}^{n} \frac{e^{itx}}{2n} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{itn} - e^{-itn}}{2int}, \quad t \neq 0,$$

illetve $\varphi_n(0) = 1$. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0, \quad t \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 1.$$

Így a φ_n, $n \in \mathbb{N}$ karakterisztikus függvények határfüggvénye

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{ha} \quad t = 0. \end{cases}$$

Ez utóbbi függvény azonban a 0 helyen nem folytonos. □

A következő feladatok megoldása során felhasználjuk majd az alábbi két lemmát.

2.5.11. Lemma. *Legyen* $\{\alpha_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *valós számok olyan sorozata, melyre* $\alpha_n \geqslant -n$ *minden elég nagy* $n \in \mathbb{N}$*-re és legyen* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$*. Ekkor*

$$\left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \to e^{\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_n \to \alpha,$$

ahol $e^{-\infty} := 0$ *és* $e^{+\infty} := +\infty$*.*

2.5.12. Lemma. *Legyen* $\{z_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ *komplex számok egy sorozata. Ha* $z_n \to z \in \mathbb{C}$*, akkor*

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to e^{z}.$$

2.5.13. Feladat. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathrm{Bin}(n, p_n)$, ahol $np_n \to \lambda \in (0, +\infty)$ és $p_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathrm{Pois}(\lambda)$, ha $n \to \infty$.

Megoldás. Ha megmutatjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\xi_n}(t) = \varphi_{\mathrm{Pois}(\lambda)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, akkor a folytonossági tétel (ii) része alapján következik az állítás. Először kiszámoljuk $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathrm{Bin}(n,p)$ és $\eta \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathrm{Pois}(\lambda)$ karakterisztikus függvényét:

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi}) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{it}p)^k(1-p)^{n-k} = (e^{it}p + 1 - p)^n,$$

és

$$\varphi_\eta(t) = \mathbb{E}(e^{it\eta}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}(p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{ha } np_n \to \lambda > 0. \tag{2.5.40}$$

Ekkor

$$(p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = (1 + p_n(e^{it}-1))^n = \left(1 + \frac{np_n(e^{it}-1)}{n}\right)^n,$$

és a feltétel miatt $np_n(e^{it}-1) \to \lambda(e^{it}-1)$, ha $n \to +\infty$. A 2.5.12. Lemma alapján kapjuk (2.5.40)-et. □

2.5.14. Feladat. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathrm{Bin}(n, p_n)$, ahol $p_n \to p \in (0,1)$, és $p_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Első megoldás. A folytonossági tételt felhasználva dolgozunk. Ekkor

$$\varphi_{\xi_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n, \qquad \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

és így

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{it\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}\right) = e^{-\frac{itnp_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}\mathbb{E}\left(e^{it\frac{\xi_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}\right)\\
&= e^{-\frac{itnp_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}\varphi_{\xi_n}\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)\\
&= e^{-\frac{itnp_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}\left(p_n e^{\frac{it}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}} + 1 - p_n\right)^n\\
&= \left(p_n e^{\frac{it(1-p_n)}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}} + (1-p_n)e^{-\frac{itp_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}\right)^n\\
&= \left(p_n e^{it\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}} + (1-p_n)e^{-it\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}}\right)^n\\
&=: \left(1 + \frac{n(z_n(t)-1)}{n}\right)^n,
\end{aligned}$$

ahol

$$z_n(t) := p_n e^{it\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}} + (1-p_n)e^{-it\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}} \in \mathbb{C}.$$

A 2.5.12. Lemma alapján, ahhoz, hogy megmutassuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}(t) = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

elég azt belátni, hogy bármilyen $t \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{n\to\infty} n(z_n(t) - 1) = -t^2/2$. Ehhez megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Re}\big(n(z_n(t)-1)\big) = -\frac{t^2}{2}, \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{Im}\big(n(z_n(t)-1)\big) = 0.$$

Ekkor

$$\mathsf{Re}\big(n(z_n(t)-1)\big) = n\left[p_n \cos\left(t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}\right) + (1-p_n)\cos\left(t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}\right) - 1\right],$$

azaz $\lim_{n\to\infty} \mathsf{Re}\big(n(z_n(t)-1)\big)$ egy $+\infty \cdot 0$ típusú határérték. (Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{L}'$Hospital szabály most nem alkalmazható egyszerűen, mert p_n függése n-től nem ismert, ami differenciálásnál probléma lehet.) A Taylor-tétel alapján kapjuk, hogy ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|x| < \varepsilon$ esetén létezik olyan $\theta(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$, hogy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\sin(\theta(x))}{3!}x^3.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}} = 0,$$

kapjuk, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geqslant n_0$ esetén

$$\left| t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}} \right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad \left| t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}} \right| < \varepsilon.$$

Így, ha $n \geqslant n_0$, akkor létezik $\theta_1(n,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}$ és $\theta_2(n,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}$, hogy

$$\begin{aligned}
&p_n \cos\left(t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}\right) + (1-p_n)\cos\left(t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}\right) - 1 \\
&\qquad = p_n\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{1-p_n}{np_n} + \frac{\sin(\theta_1(n,t))}{3!}t^3\left(\frac{1-p_n}{np_n}\right)^{3/2}\right) \\
&\qquad\quad + (1-p_n)\left(1 - \frac{t^2}{2}\frac{p_n}{n(1-p_n)} + \frac{\sin(\theta_2(n,t))}{3!}t^3\left(\frac{p_n}{n(1-p_n)}\right)^{3/2}\right) - 1 \\
&\qquad = -\frac{t^2}{2n} + \frac{\sin(\theta_1(n,t))}{3!}t^3\frac{(1-p_n)^{3/2}}{\sqrt{p_n}n\sqrt{n}} + \frac{\sin(\theta_2(n,t))}{3!}t^3\frac{p_n^{3/2}}{\sqrt{1-p_n}n\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
&n\left[p_n \cos\left(t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}\right) + (1-p_n)\cos\left(t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}\right) - 1\right] \\
&\qquad = -\frac{t^2}{2} + \frac{\sin(\theta_1(n,t))}{3!}t^3\frac{(1-p_n)^{3/2}}{\sqrt{np_n}} + \frac{\sin(\theta_2(n,t))}{3!}t^3\frac{p_n^{3/2}}{\sqrt{n(1-p_n)}}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Re}\,(n(z_n(t)-1)) = -\frac{t^2}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Hasonlóan,

$$\mathsf{Im}\,\big(n(z_n(t)-1)\big) = n\left[p_n \sin\left(t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}\right) + (1-p_n)(-1)\sin\left(t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}\right)\right],$$

azaz ez egy $+\infty\cdot 0$ típusú határértékre vezet. A Taylor-tétel alapján kapjuk, hogy ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor $\forall\, x \in \mathbb{R}, |x| < \varepsilon$ esetén létezik olyan $\theta(x) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}$, hogy

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta(x))}{4!}x^4.$$

Legyen n_0 a korábbi. Így, ha $n \geqslant n_0$, akkor létezik $\theta_1(n,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}$ és $\theta_2(n,t) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}$, hogy

$$\begin{aligned}
&p_n \sin\left(t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}\right) - (1-p_n)\sin\left(t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}\right) \\
&\quad = p_n\left(t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}} - \frac{t^3}{3!}\left(\frac{1-p_n}{np_n}\right)^{3/2} + \frac{\sin(\theta_1(n,t))}{4!}t^4\left(\frac{1-p_n}{np_n}\right)^2\right) \\
&\quad\quad - (1-p_n)\left(t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}} - \frac{t^3}{3!}\left(\frac{p_n}{n(1-p_n)}\right)^{3/2} + \frac{\sin(\theta_2(n,t))}{4!}t^4\left(\frac{p_n}{n(1-p_n)}\right)^2\right) \\
&\quad = -\frac{t^3}{3!}\frac{(1-p_n)^{3/2}}{\sqrt{p_n}n\sqrt{n}} + \frac{\sin(\theta_1(n,t))}{4!}t^4\frac{(1-p_n)^2}{n^2p_n} + \frac{t^3}{3!}\frac{p_n^{3/2}}{\sqrt{1-p_n}n\sqrt{n}} - \frac{\sin(\theta_2(n,t))}{4!}t^4\frac{p_n^2}{n^2(1-p_n)}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$
\begin{aligned}
&n\left[p_n\sin\left(t\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}\right)-(1-p_n)\sin\left(t\sqrt{\frac{p_n}{n(1-p_n)}}\right)\right]\\
&=-\frac{t^3}{3!}\frac{(1-p_n)^{3/2}}{\sqrt{np_n}}+\frac{\sin(\theta_1(n,t))}{4!}t^4\frac{(1-p_n)^2}{np_n}+\frac{t^3}{3!}\frac{p_n^{3/2}}{\sqrt{n(1-p_n)}}-\frac{\sin(\theta_2(n,t))}{4!}t^4\frac{p_n^2}{n(1-p_n)},
\end{aligned}
$$

és így $\lim_{n\to\infty}\mathsf{Im}\,(n(z_n(t)-1))=0$.

Második megoldás. Felhasználjuk az alábbi, karakterisztikus függvények Taylor-sorba fejtésére vonatkozó tételt.

Tétel: Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi|^n<+\infty$, ahol $n\in\mathbb{N}$. Ekkor $\varphi_\xi(t)$ n-szer differenciálható és $\varphi_\xi^{(k)}(0)=i^k\mathbb{E}\xi^k$, $k=1,\dots,n$, továbbá,

$$
\varphi_\xi(t)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(it)^r}{r!}\mathbb{E}\xi^r+\frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t),
$$

ahol

$$
|\varepsilon_n(t)|\leqslant 3\mathbb{E}|\xi|^n \quad\text{és}\quad \lim_{t\to 0}\varepsilon_n(t)=0.
$$

Felhasználva azt, hogy ha $\eta_1,\dots,\eta_n$ független, p_n-paraméterű Bernoulli eloszlásúak, akkor $\eta_1+\dots+\eta_n\sim\mathrm{bin}(n,p_n)$, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{\xi_n-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}(t)&=\mathbb{E}\left(e^{it\frac{\xi_n-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}\right)=\varphi_{\xi_n-np_n}\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)\\
&=\left(\varphi_{\eta_1-p_n}\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)\right)^n.
\end{aligned}
$$

Mivel $\mathbb{E}(\eta_1-p_n)^2<+\infty$, alkalmazhatjuk az előző tételt $r=2$ választással:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{\xi_n-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}(t)=\Bigg[&1+\frac{it}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\mathbb{E}(\eta_1-p_n)+\frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)^2\mathbb{E}(\eta_1-p_n)^2\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)^2\varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)\Bigg]^n,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\lim_{n\to\infty}\varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)=0,\quad t\in\mathbb{R}.
$$

Mivel $\mathbb{E}\eta_1 = p_n$ és $\mathbb{D}^2\eta_1 = p_n(1-p_n)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}(t) &= \left[1 + 0 - \frac{t^2}{2np_n(1-p_n)} p_n(1-p_n) - \frac{t^2}{2np_n(1-p_n)}\varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)\right]^n \\
&= \left[1 - \frac{t^2}{2n} - \frac{t^2}{2np_n(1-p_n)}\varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{-\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{1}{p_n(1-p_n)}\varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)\right)}{n}\right]^n.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{p_n(1-p_n)}\varepsilon_2\left(\frac{t}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right) = 1 + \frac{1}{p(1-p)} \cdot 0 = 1,$$

a 2.5.12. Lemma alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahonnan a folytonossági tétel alapján következik az állítás. □

2.5.15. Feladat. Legyen minden $\lambda \in (0, +\infty)$ esetén $\xi_\lambda \stackrel{\mathcal{D}}{=} \text{Pois}(\lambda)$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{ha } \lambda \to \infty.$$

Megoldás. A folytonossági tétel alapján elég azt megmutatni, hogy

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.5.41}$$

Ekkor $\varphi_{\xi_\lambda}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, $t \in \mathbb{R}$, és így

$$\varphi_{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right) = e^{-it\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\varphi_{\xi_\lambda}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = e^{-it\sqrt{\lambda}}e^{\lambda(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1)} = e^{\lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - it\sqrt{\lambda} - \lambda}.$$

Felhasználva azt, hogy a $z \in \mathbb{C} \mapsto e^z$ leképezés folytonos, ahhoz, hogy (2.5.41)-t belássuk elég azt megmutatni, hogy

$$\lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - it\sqrt{\lambda} - \lambda \longrightarrow -\frac{t^2}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Első módszer: A valós és képzetes részeket vizsgáljuk. Ekkor

$$\mathsf{Re}\left(\lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - it\sqrt{\lambda} - \lambda\right) = \lambda\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) - \lambda = \frac{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1}{1/\lambda},$$

és látjuk, hogy ez $\frac{0}{0}$-típusú határérték. A $\mathcal{L}'$Hospital szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{Re}\left(\lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - it\sqrt{\lambda} - \lambda\right) &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{-\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{-t}{2\lambda^{3/2}}}{-1/\lambda^2} = \lim_{\lambda\to\infty} -\frac{t}{2}\sqrt{\lambda}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} -\frac{t}{2}\frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)}{1/\sqrt{\lambda}} = -\frac{t}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{-t}{2\lambda^{3/2}}}{-\frac{1}{2\lambda^{3/2}}} \\
&= -\frac{t^2}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\frac{t^2}{2}\cos(0) = -\frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$\mathsf{Im}\left(\lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - it\sqrt{\lambda} - \lambda\right) = \lambda\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) - t\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) - t}{1/\sqrt{\lambda}} = \frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{t}{\sqrt{\lambda}}}{1/\lambda}.$$

Ez egy $\frac{0}{0}$-típusú határérték, így a $\mathcal{L}$'Hospital szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{Im}\left(\lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - it\sqrt{\lambda} - \lambda\right) &= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{-t}{2\lambda^{3/2}} + \frac{t}{2\lambda^{3/2}}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{t}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{-\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)+1}{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \\
&= \frac{t}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{-t}{2\lambda^{3/2}}}{\frac{1}{2\lambda^{3/2}}} = -\frac{t^2}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Második módszer: Felhasználjuk az alábbi egyenlőtlenséget (amit a következő feladatban bizonyítunk):

$$\left|e^{iy} - 1 - iy + \frac{y^2}{2}\right| \leqslant \frac{|y|^3}{6}, \quad y\in\mathbb{R}.$$

Ekkor bármilyen $t\in\mathbb{R}$ esetén

$$\left|\lambda e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - it\sqrt{\lambda} - \lambda + \frac{t^2}{2}\right| = \lambda\left|e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1 - i\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda}\right| \leqslant \lambda\frac{\left|\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right|^3}{6} = \frac{|t|^3}{6\sqrt{\lambda}} \to 0, \quad \lambda\to+\infty.$$

□

2.5.16. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármilyen $y\in\mathbb{R}$ esetén

$$\left|e^{iy} - 1 - iy + \frac{y^2}{2}\right| \leqslant \frac{|y|^3}{6}.$$

Megoldás. Legyen $y>0$ rögzített. Ekkor

$$e^{iy} - 1 = [e^{iz}]_{z=0}^{z=y} = \int_0^y ie^{iz}\,\mathsf{d}z,$$

és így

$$|e^{iy}-1| \leqslant \int_0^y |ie^{iz}|\,\mathsf{d}z = \int_0^y 1\,\mathsf{d}z = y.$$

Hasonló egyenlőtlenség adódik, ha $y < 0$. Így

$$|e^{iy} - 1| \leqslant |y|, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Legyen $y > 0$ újra rögzített. Ekkor,

$$e^{iy} - 1 - iy = [e^{iz} - iz]_{z=0}^{z=y} = \int_0^y (ie^{iz} - i) \, \mathsf{d}z,$$

és így az előző becslés felhasználásával

$$|e^{iy} - 1 - iy| \leqslant \int_0^y |ie^{iz} - i| \, \mathsf{d}z = \int_0^y |e^{iz} - 1| \, \mathsf{d}z \leqslant \int_0^y |z| \, \mathsf{d}z = \int_0^y z \, \mathsf{d}z = \frac{y^2}{2}.$$

Hasonló egyenlőtlenség adódik, ha $y < 0$. Így

$$|e^{iy} - 1 - iy| \leqslant \frac{y^2}{2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Legyen $y > 0$ újra rögzített. Ekkor,

$$e^{iy} - 1 - iy + \frac{y^2}{2} = \left[e^{iz} - iz + \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=y} = \int_0^y (ie^{iz} - i + z) \, \mathsf{d}z,$$

és így az előző becslés felhasználásával

$$\left|e^{iy} - 1 - iy + \frac{y^2}{2}\right| \leqslant \int_0^y |ie^{iz} - i + z| \, \mathsf{d}z = \int_0^y |e^{iz} - 1 - iz| \, \mathsf{d}z \leqslant \int_0^y \frac{z^2}{2} \, \mathsf{d}z = \frac{y^3}{6}.$$

Hasonló egyenlőtlenség adódik, ha $y < 0$. Így

$$\left|e^{iy} - 1 - iy + \frac{y^2}{2}\right| \leqslant \frac{|y|^3}{6}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

□

2.5.17. Feladat. (Tóth Bálint feladata) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlásfüggvényét jelölje F. Legyen $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Az M_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók $n \to +\infty$ aszimptotikus viselkedése az $F(x)$ eloszlásfüggvény „felső farkának” aszimptotikájától függ. Bizonyítsuk be az alábbi határeloszlástételeket.

(i) Ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $F(x) < 1$ és $\lim_{x\to\infty} x^\alpha(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített α, $b \in (0, +\infty)$ konstansokkal (azaz $1-F(x) \sim x^{-\alpha}$, amint $n \to +\infty$), akkor $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye

$$\begin{cases} e^{-bx^{-\alpha}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

(Az, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ ott jön be, hogy $b > 0$.)

(ii) Ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $F(x) < 1$ és $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített $\lambda, b \in (0, +\infty)$ konstansokkal (azaz $1 - F(x) \sim e^{-\lambda x}$, amint $n \to +\infty$), akkor $M_n - \frac{\log n}{\lambda}$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye $\exp\{-be^{-\lambda x}\}$, $x \in \mathbb{R}$. (Az, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ egyrészt ott jön be, hogy $b > 0$, másrészt, pedig, ha $b = 0$ lenne, akkor nem kapnánk eloszlásfüggvényt.)

Megoldás. (i): Mivel az

$$\begin{cases} e^{-bx^{-\alpha}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \end{cases}$$

függvény a 0 kivételével mindenhol folytonos, a gyenge konvergencia definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n < x) = \begin{cases} e^{-bx^{-\alpha}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} P(n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n < x) &= P(M_n < n^{\frac{1}{\alpha}} x) = P(X_i < n^{\frac{1}{\alpha}} x, \ i = 1, \ldots, n) = \big(F(n^{\frac{1}{\alpha}} x)\big)^n \\ &= \left[1 + \frac{n\big(F(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - 1\big)}{n}\right]^n. \end{aligned}$$

A 2.7.9. Lemma alapján elég azt megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n\big(F(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - 1\big) = \begin{cases} -bx^{-\alpha} & \text{ha} \quad x > 0, \\ -\infty & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ha $x < 0$, úgy $n^{\frac{1}{\alpha}} x \to -\infty$, ha $n \to +\infty$, és így $F(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - 1 \to -1$, illetve $n(F(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - 1) \to -\infty$.

Ha $x > 0$, úgy $n^{\frac{1}{\alpha}} x \to +\infty$, és ezért, felhasználva, hogy $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}(1 - F(x)) = b$, kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{\alpha}} x)^{\alpha}\big(1 - F(n^{\frac{1}{\alpha}} x)\big) = b,$$

azaz $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(n^{\frac{1}{\alpha}} x)) = x^{-\alpha} b$, és így

$$\lim_{n\to\infty} n(F(n^{\frac{1}{\alpha}} x) - 1) = -bx^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

(ii): Hasonlóan az előző részhez, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\left(M_n - \frac{\log n}{\lambda} < x\right) &= P\left(M_n < x + \frac{\log n}{\lambda}\right) = \left(F\big(x + \frac{\log n}{\lambda}\big)\right)^n \\ &= \left[1 + \frac{n(F(x + \frac{\log n}{\lambda}) - 1)}{n}\right]^n. \end{aligned}$$

A 2.5.12. Lemma alapján elég azt megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(F\big(x+\frac{\log n}{\lambda}\big)-1\Big) = -be^{-\lambda x}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{2.5.42}$$

Mivel bármilyen $x\in\mathbb{R}$ esetén $x+\frac{\log n}{\lambda}\to+\infty$, ha $n\to\infty$, és a feltétel miatt

$$\lim_{n\to\infty} e^{\lambda x}(1-F(x)) = b \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} e^{\lambda\left(x+\frac{\log n}{\lambda}\right)}\left(1-F\left(x+\frac{\log n}{\lambda}\right)\right) = b, \quad x\in\mathbb{R},$$

kapjuk (2.5.42)-at. □

2.5.18. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 5.9.3.) Tekintsünk egy érmét, melyet, ha feldobunk, akkor p valószínűséggel esik a fej, ill. $1-p$ valószínűséggel az írás oldalára. Egymás után dobáljuk ezt az érmét, és jelölje N az ahhoz szükséges dobások számát, hogy megjelenjen a dobássorozatban a k-adik fej, ahol $k\in\mathbb{N}$ rögzített. Mutassuk meg, hogy $2Np \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma(k,\frac{1}{2})$, amint $p\to0$.

Megoldás. A feladatot a folytonossági tétel segítségével oldjuk meg. Elég azt megmutatni, hogy

$$\varphi_{2Np}(t)\to\varphi_{\Gamma(k,1/2)}(t) = (1-2it)^{-k}, \quad \forall\, t\in\mathbb{R},$$

ahol $\Gamma(k,\frac{1}{2})$ karakterisztikus függvényének felírásánál felhasználtuk a 2.5.3. Feladatot.

Meghatározzuk először N karakterisztikus függvényét. Ismert, hogy N felírható $N = T_1+\cdots+T_n$ alakban, ahol $T_1,T_2,\dots,T_k$ független, p-paraméterű geometriai eloszlásúak, azaz

$$P(T_i=r) = p(1-p)^{r-1}, \quad r\in\mathbb{N},\ i=1,\dots,k.$$

Ekkor

$$\varphi_{T_1}(t) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{itr}p(1-p)^{r-1} = pe^{it}\sum_{r=1}^{\infty}(e^{it}(1-p))^{r-1} = pe^{it}\frac{1}{1-e^{it}(1-p)},$$

és ezért

$$\varphi_N(t) = \big(\varphi_{T_1}(t)\big)^k = \left(\frac{pe^{it}}{1-e^{it}(1-p)}\right)^k.$$

Így

$$\varphi_{2Np}(t) = \varphi_N(2pt) = \left(\frac{pe^{i2pt}}{1-e^{i2pt}(1-p)}\right)^k.$$

Ekkor a $\mathcal{L}'$Hospital szabály alapján

$$\lim_{p\to0}\frac{pe^{i2pt}}{1-e^{i2pt}(1-p)} = \lim_{p\to0}\frac{e^{i2pt}+pe^{i2pt}i2t}{e^{i2pt}-e^{i2pt}(1-p)i2t} = \frac{1}{1-i2t},$$

és így

$$\varphi_{2Np}(t)\to\left(\frac{1}{1-i2t}\right)^k = (1-i2t)^{-k}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

□

2.5.19. Feladat. (Rényi [2], 3.1.5.) Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ abszolút folytonos valószínűségi változók, f_n, $n \in \mathbb{N}$, illetve f sűrűségfüggvényekkel. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$.

Megoldás. Ha P_{ξ_n}, $n \in \mathbb{N}$, illetve P_ξ jelöli ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, illetve ξ eloszlását, akkor egy előadásbeli tétel alapján $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$ akkor és csak akkor, ha $P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi$ gyengén. A portmanteau tétel alapján

$$P_{\xi_n} \Rightarrow P_\xi \quad \text{gyengén} \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} P_{\xi_n}(G) \geqslant P_\xi(G) \quad \forall\, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{nyílt halmaz esetén.}$$

Mi a $\liminf$-re vonatkozó egyenlőtlenséget mutatjuk meg. Felhasználjuk majd az (analízises) Fatou-lemmát, miszerint, ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mérhető függvények, hogy $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty$ μ-majdnem minden $x \in X$ esetén, akkor

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, \mathsf{d}\mu(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, \mathsf{d}\mu(x),$$

ha $\int_X \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\, \mathsf{d}\mu(x) > -\infty$.

Jelen esetben az abszolút folytonosság miatt bármilyen $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nyílt halmaz esetén

$$\liminf_{n\to\infty} P_{\xi_n}(G) = \liminf_{n\to\infty} \int_G f_n(x)\, \mathsf{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathbb{1}_G(x)\, \mathsf{d}x.$$

Végiggondoljuk most, hogy a Fatou-lemma alkalmazható-e. Mivel $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén és tudva azt, hogy konvergens sorozat korlátos, kapjuk, hogy $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel f_n nemnegatív, kapjuk, hogy $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$. Így a Fatou-lemma alkalmazható, és felhasználva, hogy $\liminf_{n\to\infty}(f_n(x)\mathbb{1}_G(x)) = f(x)\mathbb{1}_G(x)$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, kapjuk, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} P_{\xi_n}(G) \geqslant \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} \Big(f_n(x)\mathbb{1}_G(x)\Big)\, \mathsf{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{1}_G(x)\, \mathsf{d}x = \int_G f(x)\, \mathsf{d}x = P_\xi(G).$$

Ezért $\liminf_{n\to\infty} P_{\xi_n}(G) \geqslant P_\xi(G)$ bármilyen $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nyílt halmaz esetén.

Ez a feladat alkalmazható például azon statisztikai feladat megoldásánál, hogy $t_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$, ahol t_n jelöli az n-szabadsági fokú t-eloszlást. □

2.5.20. Feladat. (Rényi [2], 3.1.6.) Adjunk példát olyan abszolút folytonos ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ valószínűségi változókra (ξ is abszolút folytonos), hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$, de $f_{\xi_n}(x)$ nem tart $f_\xi(x)$-hez egyetlen olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban sem, ahol $f_\xi(x) > 0$. (Ez a feladat arra példa, hogy az 2.5.19. Feladat megfordítása nem igaz.)

Megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az

$$F_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ x + \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} & \text{ha} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

eloszlásfüggvényt. Ezek tényleg eloszlásfüggvények, mert F_n balról folytonos, $\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_n(x) = 1$, és F_n monoton növekvő is, hiszen bármilyen $x \in (0,1)$ esetén

$$F_n'(x) = 1 + \frac{1}{2\pi n} 2\pi n \cos(2\pi n x) \geqslant 0.$$

Az F_n eloszlásfüggvényű valószínűségi változók abszolút folytonosak is és sűrűségfüggvényük

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \cos(2\pi n x) & \text{ha} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{ha} \quad x < 0 \quad \text{vagy} \quad x > 1. \end{cases}$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ x & \text{ha} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{ha} \quad x \geqslant 1 \end{cases} := F(x).$$

Látjuk, hogy F a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye, így legyen $\xi := U([0,1])$. És ezért $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} U([0,1])$. Azonban, ha $x \in (0,1)$ tetszőlegesen rögzített, akkor

$$f_n(x) = 1 + \cos(2\pi n x) \nrightarrow 1, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Ugyanis, ha $2\pi x \in \mathbb{Q}$, akkor $\cos(2\pi n x), n \in \mathbb{N}$ mindig véges sok érték valamelyikét veszi fel, ha pedig $2\pi x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $\cos(2\pi n x), n \in \mathbb{N}$ sűrű a $[-1,1]$ intervallumban. □

2.5.21. Feladat. (Rényi [2], 3.1.8.) Bizonyítsuk be, hogy ha az F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvények sorozatára fennáll, hogy $F_n(x) \to \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ahol $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos eloszlásfüggvény, akkor bármilyen $x_n \to x \in \mathbb{R}$ sorozat esetén $F_n(x_n) \to \Phi(x)$, ha $n \to +\infty$. (A bizonyításban azt nem használjuk ki, hogy Φ eloszlásfüggvény, csak azt, hogy folytonos. Ez ott lehet érdekes, ahol Φ konstans.)

Megoldás. Legyen $h > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor $x_n \to x$ miatt létezik olyan $N_0 \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant N_0$ esetén $x_n \in (x-h, x+h)$, azaz $x - h < x_n < x + h$, ha $n \geqslant N_0$. Végezzük el az alábbi becslést:

$$|F_n(x_n) - \Phi(x)| \leqslant |F_n(x_n) - F_n(x)| + |F_n(x) - \Phi(x)|.$$

Megmutatjuk, hogy ha $n \geqslant N_0$, akkor

$$|F_n(x_n) - F_n(x)| \leqslant F_n(x+h) - F_n(x-h). \tag{2.5.43}$$

(Itt $F_n(x+h) - F_n(x-h) \geqslant 0$, hiszen F_n monoton növekvő és $h > 0$.) Ha $x_n \geqslant x$, úgy $F_n(x_n) - F_n(x) \geqslant 0$, így (2.5.43) baloldala $|F_n(x_n) - F_n(x)| = F_n(x_n) - F_n(x)$. Mivel $x_n < x + h$, $F_n(x_n) \leqslant F_n(x+h)$, és mivel $x - h < x$, $F_n(x-h) \leqslant F_n(x)$, azaz $-F_n(x-h) \geqslant -F_n(x)$. Így

$$|F_n(x_n) - F_n(x)| = F_n(x_n) - F_n(x) \leqslant F_n(x+h) - F_n(x-h).$$

Hasonlóan, ha $x_n < x$, úgy $F_n(x_n) \leqslant F_n(x)$, így (2.5.43) baloldala $|F_n(x_n) - F_n(x)| = F_n(x) - F_n(x_n)$. Mivel $x < x + h$, $F_n(x) \leqslant F_n(x+h)$, és mivel $x - h < x_n$, $F_n(x - h) \leqslant F_n(x_n)$, azaz $-F_n(x-h) \geqslant -F_n(x_n)$. Így

$$|F_n(x_n) - F_n(x)| = F_n(x) - F_n(x_n) \leqslant F_n(x+h) - F_n(x-h).$$

Tehát fennáll (2.5.43). Ezért

$$\begin{aligned}|F_n(x_n) - \Phi(x)| &\leqslant |F_n(x+h) - F_n(x-h)| + |F_n(x) - \Phi(x)| \\ &\leqslant |F_n(x+h) - \Phi(x+h)| + |\Phi(x+h) - \Phi(x-h)| + |\Phi(x-h) - F_n(x-h)| \\ &\quad + |F_n(x) - \Phi(x)|.\end{aligned}$$

Mivel $F_n(x) \to \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} |F_n(x_n) - \Phi(x)| \leqslant |\Phi(x+h) - \Phi(x-h)|, \quad \forall\, h > 0.$$

Mivel Φ folytonos, $h \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} |F_n(x_n) - \Phi(x)| \leqslant 0.$$

Ezért létezik a $\lim_{n\to\infty} F_n(x_n)$ határérték minden $x \in \mathbb{R}$ esetén és $\Phi(x)$-el egyenlő. □

2.5.22. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ és ξ valószínűségi változók, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$. Mutassuk meg, hogy bármilyen $x_n \to +\infty$ sorozat esetén $F_{\xi_n}(x_n) \to 1$, illetve bármilyen $x_n \to -\infty$ sorozat esetén $F_{\xi_n}(x_n) \to 0$.

Megoldás. Mivel $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \xi$, kapjuk, hogy $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ minden olyan $x \in \mathbb{R}$ pontban, ahol F_ξ folytonos. Mivel F_ξ eloszlásfüggvény, ezért legfeljebb megszámlálható sok pontban nem folytonos. Jelölje F_ξ szakadási helyeinek halmazát D.

Tegyük fel először, hogy $x_n \to -\infty$. Válasszunk egy olyan $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ valós számokból álló sorozatot, hogy $M_k \to -\infty$ és $M_k \notin D$, $k \in \mathbb{N}$. (Mivel D megszámlálható, ilyen $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ sorozat választható.) Ekkor $F_{\xi_n}(M_k) \to F_\xi(M_k)$, ha $n \to +\infty$ bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel $x_n \to -\infty$, bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $N_0(M_k) \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant N_0(M_k)$ esetén $x_n < M_k$. Mivel F_{ξ_n} monoton növekvő, ezért $F_{\xi_n}(x_n) \leqslant F_{\xi_n}(M_k)$, ha $n \geqslant N_0(M_k)$. Így

$$\limsup_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} F_{\xi_n}(M_k) = F_\xi(M_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Véve mindkét oldal $\limsup_{k\to\infty}$-jét, kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_n) \leqslant \limsup_{k\to\infty} F_\xi(M_k) = \lim_{k\to\infty} F_\xi(M_k) = 0,$$

hiszen F_ξ eloszlásfüggvény. Így létezik az $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_n)$ határérték és 0-val egyenlő.

Tegyük most fel, hogy $x_n \to +\infty$. Válasszunk egy olyan $(M_k)_{k=1}^{+\infty}$ valós számokból álló sorozatot, hogy $M_k \to +\infty$ és $M_k \notin D$, $k \in \mathbb{N}$. Ekkor $F_{\xi_n}(M_k) \to F_\xi(M_k)$, ha $n \to +\infty$ bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel $x_n \to +\infty$, bármilyen $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $N_0(M_k) \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant N_0(M_k)$ esetén $x_n > M_k$. Mivel F_{ξ_n} monoton növekvő, ezért $F_{\xi_n}(M_k) \leqslant F_{\xi_n}(x_n)$, ha $n \geqslant N_0(M_k)$. Így

$$F_\xi(M_k) = \lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(M_k) = \liminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(M_k) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_n), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Véve mindkét oldal $\liminf_{k\to\infty}$-jét, kapjuk, hogy

$$\liminf_{k\to\infty} F_\xi(M_k) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_n).$$

Mivel

$$\liminf_{k\to\infty} F_\xi(M_k) = \lim_{k\to\infty} F_\xi(M_k) = 1,$$

kapjuk, hogy létezik az $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x_n)$ határérték és 1-el egyenlő.

Megjegyezzük, hogy ezt a feladatot és az előző feladatot úgy foglalhatjuk össze, hogy ha F_n, $n \in \mathbb{N}$ eloszlásfüggvények sorozatára fennáll, hogy $F_n(x) \to \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ahol $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos eloszlásfüggvény, akkor bármilyen $x_n \to x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ sorozat esetén $F_n(x_n) \to \Phi(x)$, ha $n \to +\infty$, ahol $\Phi(+\infty) := 1$, $\Phi(-\infty) := 0$. (Itt már kell, hogy Φ folytonos és eloszlásfüggvény legyen!) □

2.5.23. Feladat. (Rényi [2], 3.1.9.) Tegyük fel, hogy a Z_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó sorozatnak van határeloszlása, melyet Z-vel fogunk jelölni, azaz $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, ha $n \to \infty$. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n))$ létezéséből nem következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(Z_n)) = \mathbb{E}g(Z).$$

(Azaz abban a tételben, ami a gyenge konvergencia átfogalmazásairól szól fontos a korlátosság feltétele (is). Ha g korlátos is lenne, úgy már igaz lenne a dolog.)

Megoldás. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független valószínűségi változók, hogy

$$P(X_n = n+1) = P(X_n = -(n+1)) = \frac{1}{2(n+1)^2}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Legyen továbbá,

$$Z_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

és $g(x) := x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}X_n = 0, && \mathbb{D}^2 X_n = \mathbb{E}X_n^2 = 1, \\ &\mathbb{E}Z_n = 0, && \mathbb{D}^2 Z_n = \frac{1}{n}(\mathbb{D}^2 X_1 + \cdots + \mathbb{D}^2 X_n) = 1. \end{aligned}$$

Az alábbiakban az $F_{X_1+\cdots+X_n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ eloszlásfüggvényt vizsgáljuk. A folytonossági tételt felhasználva megmutatjuk, hogy $X_1 + \cdots + X_n := S_n$ gyengén konvergál valamilyen valószínűségi változóhoz, amint $n \to +\infty$. Ehhez először meghatározzuk $X_1 + \cdots + X_n$ karakterisztikus függvényét:

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + e^{it(k+1)} \frac{1}{2(k+1)^2} + e^{-it(k+1)} \frac{1}{2(k+1)^2} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} + \cos(t(k+1)) \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1 - \cos(t(k+1))}{(k+1)^2} \right).\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén létezik a $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)$ határérték. Mivel

$$\left| \frac{1 - \cos(t(k+1))}{(k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

értelmes logaritmust venni, és használható majd az

$$|\ln(1 - z)| \leqslant 2|z|, \quad \text{ha } |z| \leqslant 1/2 \tag{2.5.44}$$

egyenlőtlenség. Így

$$\ln\left(\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1 - \cos(t(k+1))}{(k+1)^2} \right).$$

Ezért, ha megmutatjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1 - \cos(t(k+1))}{(k+1)^2} \right) \quad \text{sor konvergens,}$$

akkor kapjuk, hogy a $\lim_{n\to\infty} \ln(\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t))$ határérték létezik. A szóbanforgó sor konvergenciája a majoráns kritériummal igazolható, ugyanis (2.5.44) alapján

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1 - \cos(t(k+1))}{(k+1)^2} \right) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|1 - \cos(t(k+1))|}{(k+1)^2} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < 4\frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Ezért létezik olyan $\widetilde{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)) = \widetilde{G}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

azaz $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = e^{\widetilde{G}(t)}$, $t \in \mathbb{R}$. Ha megmutatjuk, hogy $e^{\widetilde{G}(t)}$ 0-ban folytonos, akkor a folytonossági tétel (ii) része miatt $e^{\widetilde{G}(t)}$, $t \in \mathbb{R}$ karakterisztikus függvény, és a hozzátartozó, $\widetilde{F}$-al jelölt, eloszlásfüggvényhez konvergál gyengén $F_{X_1+\cdots+X_n}$, amint $n \to +\infty$. Ahhoz, hogy $e^{\widetilde{G}(t)}$ a 0-ban folytonos azt kell belátni, hogy $\widetilde{G}$ a 0-ban folytonos. Mivel

$$\widetilde{G}(0) = \lim_{n\to\infty} \ln(\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(0)) = \lim_{n\to\infty} \ln 1 = 0,$$

azt kell belátnunk, hogy $\lim_{t\to 0}\widetilde{G}(t) = 0$. A Weierstrass-féle elegendő kritérium alkalmazásával egyszerűen kijön az is, hogy $\widetilde{G}$ mindenhol folytonos. Ugyanis, a korábbiak alapján

$$\ln\left(1-\frac{1-\cos(t(k+1))}{(k+1)^2}\right) \leqslant \frac{4}{(k+1)^2}, \quad \forall\, t\in\mathbb{R},\ \forall\, k\in\mathbb{N},$$

és mivel $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(k+1)^2} < +\infty$, a Weierstrass-féle elegendő kritérium alapján a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1-\cos(t(k+1))}{(k+1)^2}\right)$$

függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en. Szintén egy analízisbeli tétel alapján (folytonos függvények egyenletes konvergens sorának határfüggvénye is folytonos) kapjuk, hogy a fenti függvénysor határfüggvénye is folytonos, ez a határfüggvény azonban nem más, mint $\widetilde{G}(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Létezik tehát olyan $\widetilde{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eloszlásfüggvény, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1+\cdots+X_n < x) = \widetilde{F}(x)$$

minden olyan $x\in\mathbb{R}$ pontban, ahol $\widetilde{F}$ folytonos. Így

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(Z_n < x) &= \lim_{n\to\infty} P(X_1+\cdots+X_n < \sqrt{n}x) = \lim_{n\to\infty} F_{X_1+\cdots+X_n}(\sqrt{n}x)\\ &= \begin{cases}0 & \text{ha} \quad x<0,\\ 1 & \text{ha} \quad x>0,\end{cases}\end{aligned} \tag{2.5.45}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk az 2.5.22. Feladatot ($\widetilde{F}$ eloszlásfüggvény, $P(S_n < x)\to\widetilde{F}(x)$, ha x $\widetilde{F}$ folytonossági pontja, $\sqrt{n}x\to+\infty$, ha $x>0$, illetve $\sqrt{n}x\to-\infty$, ha $x<0$). Ezért $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \delta_0$, ahol δ_0 a 0-ba koncentrálódó Dirac-mértéket jelöli. Megjegyezzük, hogy (2.5.45)-ben $x=0$-ban nem kell teljesülnie a konvergenciának, hiszen 0 nem folytonossági pontja F_{δ_0}-nak.

Mivel $g(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}g(Z_n)=\mathbb{E}Z_n^2=1$, $n\in\mathbb{N}$, és így $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}g(Z_n) = 1$. Azonban, $\mathbb{E}g(Z)=\mathbb{E}Z^2=\mathbb{E}\delta_0^2=0$, és ezért nem teljesül a $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}g(Z_n)=\mathbb{E}g(Z)$ feltétel. □

2.6. Centrális határeloszlás-tétel

Először felidézzük az infinitezimalitás definícióját.

2.6.1. Definíció. *Valószínűségi változók* $\{X_{n,k} : n\in\mathbb{N}, k=1,\ldots,n\}$ *rendszerét háromszögrendszernek nevezzük, ha minden* $n\in\mathbb{N}$ *esetén* $X_{n,1},\ldots,X_{n,n}$ *függetlenek. Azt mondjuk, hogy az* $\{X_{n,k} : n\in\mathbb{N}, k=1,\ldots,n\}$ *háromszögrendszer* **infinitezimális,** *ha bármilyen* $\varepsilon>0$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n} P(|X_{n,k}|>\varepsilon) = 0.$$

2.6.2. Feladat. Legyen adott egy $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ háromszögrendszer. Mutassuk meg, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) az $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ háromszögrendszer infinitezimális,

(ii) tetszőleges $k_n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k_n \leqslant n$ sorozatra teljesül, hogy $X_{n,k_n} \stackrel{st}{\longrightarrow} 0$, ha $n \to +\infty$,

(iii) tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_{n,k}(t) - 1| = 0,$$

ahol $\varphi_{n,k}(t) = \mathbb{E}e^{itX_{n,k}}$, $t \in \mathbb{R}$,

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\left(\frac{|X_{n,k}|}{1+|X_{n,k}|}\right) = 0.$$

Megoldás. *(i)* ⇒ *(ii)*: Azt kell belátni, hogy tetszőleges $k_n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k_n \leqslant n$ sorozat esetén, bármilyen $\varepsilon > 0$-ra fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{n,k_n}| > \varepsilon) = 0.$$

Mivel

$$P(|X_{n,k_n}| > \varepsilon) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} P(|X_{n,k}| > \varepsilon), \quad n \in \mathbb{N},$$

az (i) feltétel alapján kapjuk a dolgot. Valóban,

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} P(|X_{n,k_n}| > \varepsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} P(|X_{n,k}| > \varepsilon) = 0.$$

(ii) ⇒ *(i)* : Mivel létezik olyan $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat, hogy $1 \leqslant k_n \leqslant n$ és

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} P(|X_{n,k}| > \varepsilon) = P(|X_{n,k_n}| > \varepsilon),$$

a (ii) feltétel alapján kapjuk a dolgot.

(i) ⇒ *(iii)* : Az *(i)* ⇒ *(ii)* rész alapján, bármilyen $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k_n \leqslant n$ sorozat esetén $X_{n,k_n} \stackrel{st}{\longrightarrow} 0$. Így $X_{n,k_n} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} 0$, és ezért a folytonossági tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n,k_n}(t) = \varphi_0(t) = \mathbb{E}e^{it0} = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

azaz

$$|\varphi_{n,k_n}(t) - 1| \to 0, \quad n \to \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Felhasználva, hogy létezik olyan $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat, hogy $1 \leqslant k_n \leqslant n$ és

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_{n,k}(t) - 1| = |\varphi_{n,k_n}(t) - 1|, \quad n \in \mathbb{N},$$

kapjuk (iii)-t.

$(iii) \Rightarrow (i)$: A (iii) feltételből következik, hogy tetszőleges $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k_n \leqslant n$ sorozat esetén $\varphi_{n,k_n}(t) \to 1$, $t \in \mathbb{R}$. Ezért a folytonossági tétel alapján $X_{n,k_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Mivel a határ valószínűségi változó konstans 0, a 2.2.23. Feladat alapján kapjuk, hogy $X_{n,k_n} \xrightarrow{st} 0$. Felhasználva a $(ii) \Rightarrow (i)$ irányt kapjuk a dolgot.

Az alábbiakban az $(i) \Leftrightarrow (iv)$ bizonyításával foglalkozunk. Felhasználva, hogy létezik olyan $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k_n \leqslant n$ sorozat, hogy

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\left(\frac{|X_{n,k}|}{1+|X_{n,k}|}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{|X_{n,k_n}|}{1+|X_{n,k_n}|}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

az $(i) \Leftrightarrow (ii)$ ekvivalenciát felhasználva elég azt megmutatnunk $(i) \Leftrightarrow (iv)$-hez, hogy tetszőleges $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k_n \leqslant n$ sorozat esetén

$$X_{n,k_n} \xrightarrow{st} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\left(\frac{|X_{n,k_n}|}{1+|X_{n,k_n}|}\right) \to 0.$$

Felhasználva a 2.2.42. Feladat (b) részét $\xi \equiv 0$ választással kapjuk a fenti ekvivalenciát. □

2.6.3. Feladat. Legyen adott egy $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ háromszögrendszer. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}X_{n,k} = 0$, $\mathbb{E}X_{n,k}^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, és

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{D}^2 X_{n,k} = 0.$$

Mutassuk meg, hogy az $\{X_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ háromszögrendszer infinitezimális.

Megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2 X_{n,k} = \mathbb{E}X_{n,k}^2 &= \mathbb{E}\big[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|>\varepsilon\}}\big] + \mathbb{E}\big[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}}\big] \geqslant \mathbb{E}\big[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|>\varepsilon\}}\big]\\ &\geqslant \mathbb{E}\big[\varepsilon^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|>\varepsilon\}}\big] = \varepsilon^2 P(|X_{n,k}| > \varepsilon).\end{aligned}$$

Így

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} P(|X_{n,k}| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{D}^2 X_{n,k},$$

és ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} P(|X_{n,k}| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{D}^2 X_{n,k} = 0.$$

Azaz $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} P(|X_{n,k}| > \varepsilon) = 0$. □

2.6.4. Feladat. Legyenek X_k, $k \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\mathbb{E}X_1^2 < +\infty$ és $\sigma := \sqrt{\mathbb{D}^2 X_1} > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\left\{\frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$$

infinitezimális háromszögrendszer.

Megoldás. Definíció alapján bizonyítunk. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Az azonos eloszlásúság miatt kapjuk, hogy

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} P\left(\left|\frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right) = \limsup_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1}{\sigma\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

hiszen, ha ξ egy valószínűségi változó, akkor $\lim_{x\to\infty} P(\xi > x) = 0$. Így

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n} P\left(\left|\frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

□

2.6.5. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan független valószínűségi változók, melyekre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 2^n)$. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy ekkor

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}^2 S_n}} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

de nem teljesül a Lindeberg-feltétel.

Megoldás. Mivel $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ függetlenek és $\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy S_n normális eloszlású, $\mathbb{E}S_n = 0$ és

$$\mathbb{D}^2 S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{D}^2 \xi_k = \sum_{k=1}^n 2^k = 2\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2(2^n - 1),$$

azaz $S_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 2(2^n - 1))$. Így

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}^2 S_n}} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0,1), \quad n \in \mathbb{N},$$

és emiatt az eloszlásban való konvergencia triviálisan igaz.

Tegyük fel indirekt, hogy a Lindeberg-feltétel teljesül. Ekkor az előadáson tanultak miatt

$$r_n := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\sigma_k}{D_n} \to 0 \quad \text{ha } n \to \infty,$$

ahol $\sigma_k := \sqrt{\mathbb{D}^2 \xi_k}$, és $D_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}$. Ekkor

$$r_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt{2(2^n - 1)}} = \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{2(2^n - 1)}} = \sqrt{\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}} = \sqrt{\frac{1}{2 - 1/2^{n-1}}},$$

és így $\lim_{n\to\infty} r_n = \sqrt{1/2} \neq 0$. Azaz ellentmondásra jutottunk, így nem teljesülhet a Lindeberg–feltétel. □

2.6.6. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $\{X_{n,k} : k = 1, \dots, n\}$ olyan független valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X_{n,k} = 0$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n$ esetén $\mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} < +\infty$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} = 0,$$

ahol $D_n := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}^2 X_{n,k}}$. (Ez utóbbi az ún. Ljapunov-feltétel.) Bizonyítandó, hogy ekkor

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}^2 S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

ahol $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$.

Megoldás. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor teljesül a Lindeberg-feltétel, vagyis bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}| \geqslant \varepsilon D_n\}}\Big] = 0.$$

Ugyanis ekkor a Lindeberg-féle centrális határeloszlás tétel miatt teljesül az állítás. Ekkor

$$\mathbb{E}\Big[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}| \geqslant \varepsilon D_n\}}\Big] = \int_\Omega |X_{n,k}(\omega)|^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}(\omega)| \geqslant \varepsilon D_n\}} \,\mathsf{d}P(\omega) = \int_{\{|X_{n,k}| \geqslant \varepsilon D_n\}} |X_{n,k}(\omega)|^2 \,\mathsf{d}P(\omega).$$

Mivel az $\{|X_{n,k}| \geqslant \varepsilon D_n\}$ integrálási tartományon $|X_{n,k}|^\delta/(\varepsilon D_n)^\delta \geqslant 1$, és nemnegatív függvényt integrálunk, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\Big[X_{n,k}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}| \geqslant \varepsilon D_n\}}\Big] \leqslant \int_{\{|X_{n,k}| \geqslant \varepsilon D_n\}} \frac{|X_{n,k}(\omega)|^{2+\delta}}{(\varepsilon D_n)^\delta} \,\mathsf{d}P(\omega) \leqslant \int_\Omega \frac{|X_{n,k}(\omega)|^{2+\delta}}{(\varepsilon D_n)^\delta} \,\mathsf{d}P(\omega).$$

Így a Ljapunov-feltétel miatt

$$\limsup_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\varepsilon D_n)^\delta} \mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} = 0,$$

tehát $\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = 0$. □

2.6.7. Feladat. Legalább hányszor kell dobni egy szabályos érmével, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.95 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől (1/2-től)? (A központi határeloszlás tétel segítségével oldjuk meg a feladatot!)

Megoldás. Tegyük fel, hogy legalább n-szer kell dobni, ekkor erre az n értékre teljesülnie kell, hogy

$$P\Big(\Big|\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2}\Big| < 0.1\Big) \geqslant 0.95,$$

ahol A azt az esemény jelöli, hogy az érmét egyszer feldobva fej az eredmény, $k_n(A)$ pedig az A esemény gyakorisága n független ismétlés során. Ismert, hogy $k_n(A)$ előállítható $k_n(A) = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ alakban, ahol

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-edik dobás fej,} \\ 0 & \text{ha az } i\text{-edik dobás írás,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ekkor

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = 0) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Mivel $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n \xi_i) = n/2$ és $\mathbb{D}^2(\sum_{i=1}^n \xi_i) = n/4$, a centrális határeloszlás tétel alapján kapjuk, hogy

$$\frac{k_n(A) - n/2}{\sqrt{n/4}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Ezért bármely $a > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{k_n(A) - n/2}{\sqrt{n}/2} \in [-a, a)\right) = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1,$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{a}{2\sqrt{n}}, \frac{a}{2\sqrt{n}}\right)\right) = 2\Phi(a) - 1.$$

Így, ha n elég nagy, akkor

$$P\left(\frac{k_n(A)}{n} - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{a}{2\sqrt{n}}, \frac{a}{2\sqrt{n}}\right)\right) \approx 2\Phi(a) - 1.$$

Ezért, ha úgy választjuk meg a és n értékét, hogy $2\Phi(a) - 1 = 0.95$ és $a/(2\sqrt{n}) = 0.1$ legyen, akkor jó közelítő becslést kapunk n-re. A standard normális eloszlás táblázatából kikeresve $a \approx 1.96$, és így $n \approx 96.04$. Azaz az érmét kb. 97-szer kell feldobni. □

2.6.8. Feladat. (Szevasztyanov–Csisztyakov–Zubkov [16], 4.5.12.) Legyenek $\xi_1^{(n)}$, $\xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(\xi_j^{(n)} = \sqrt{n}) = P(\xi_j^{(n)} = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2n}, \qquad P(\xi_j^{(n)} = 0) = \frac{n-1}{n}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Határozzuk meg az

$$\eta_n := \frac{\xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{n\mathbb{D}^2\xi_1^{(n)}}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

valószínűségi változó sorozat határeloszlását, amint $n \to \infty$.

Megoldás. Ekkor $\mathbb{E}\xi_j^{(n)} = 0$, és

$$\mathbb{D}^2\xi_j^{(n)} = n\frac{1}{2n} + n\frac{1}{2n} + 0(1 - 1/n) = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

A határeloszlás megállapításához η_n karakterisztikus függvényének pontonkénti konvergenciáját vizsgáljuk, amint $n \to \infty$. Legyen a továbbiakban $t \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor felhasználva, hogy $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ függetlenek és azonos eloszlásúak, kapjuk, hogy

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \mathbb{E}e^{it\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k^{(n)}}{\sqrt{n}}} = \mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^n e^{it\frac{\xi_k^{(n)}}{\sqrt{n}}}\Big] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{it\frac{\xi_k^{(n)}}{\sqrt{n}}} = \Big[\mathbb{E}e^{it\frac{\xi_1^{(n)}}{\sqrt{n}}}\Big]^n.$$

Ekkor

$$\mathbb{E}e^{it\frac{\xi_1^{(n)}}{\sqrt{n}}} = e^{it\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}\frac{1}{2n} + e^{it\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}\frac{1}{2n} + e^{it\frac{0}{\sqrt{n}}}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2n}(e^{it}+e^{-it}) + 1 - \frac{1}{n} = \frac{\cos t}{n} + 1 - \frac{1}{n}.$$

Így a 2.7.9. Lemma alapján

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \left(\frac{\cos t}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\cos t - 1}{n}\right)^n \to e^{\cos t - 1}, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Az alábbiakban keresünk egy olyan valószínűségi változót, aminek $e^{\cos t-1}$, $t \in \mathbb{R}$ a karakterisztikus függvénye. Nevezetesen megmutatjuk, hogy két független, $1/2$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó különbségének a karakterisztikus függvénye $e^{\cos t-1}$, $t \in \mathbb{R}$. Felhasználva azt, hogy egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson eloszlás karakterisztikus függvénye $e^{\lambda(e^{it}-1)}$, $t \in \mathbb{R}$, a fentihez azt kell leellenőrizni, hogy

$$e^{\cos t - 1} = e^{(e^{it}-1)/2} e^{(e^{-it}-1)/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$e^{(e^{it}-1)/2} e^{(e^{-it}-1)/2} = e^{(\cos t + i\sin(t) - 1 + \cos(t) - i\sin(t) - 1)/2} = e^{\cos t - 1}.$$

Ebben az esetben a Lindeberg-feltétel nem teljesülhet, mert ez esetben $\mathcal{N}(0,1)$ lenne a határeloszlás. Valóban, a Lindeberg-feltétel azt mondja ki, hogy

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{D_n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big[(\xi_k^{(n)})^2 \mathbb{1}_{\{|\xi_k^{(n)}| \geqslant \varepsilon D_n\}}\Big] = 0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

és, ha $1 > \varepsilon > 0$, akkor

$$g_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} n \mathbb{E}\Big[(\xi_1^{(n)})^2 \mathbb{1}_{\{|\xi_1^{(n)}| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}\}}\Big] = n\frac{1}{2n} + n\frac{1}{2n} = 1 \not\to 0.$$

Tehát a Lindeberg-feltétel valóban nem teljesül. □

2.6.9. Feladat. (Szevasztyanov–Csisztyakov–Zubkov [16], 4.2.15.) Legyenek a ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ sorozat elemei q_n-paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók, ahol $q_n \to 0$, ha $n \to +\infty$. Határozzuk meg az $\eta_n := q_n\xi_n$, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó sorozat határeloszlását! (Feltételezzük, hogy $q_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$.)

Megoldás. Ekkor

$$P(\xi_n = k+1) = q_n(1-q_n)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

és ξ_n karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_n} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{it(k+1)} q_n(1-q_n)^k = q_n e^{it} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{it}(1-q_n))^k = \frac{q_n e^{it}}{1 - e^{it}(1-q_n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Így

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \mathbb{E}e^{it\eta_n} = \mathbb{E}e^{itq_n\xi_n} = \frac{q_n e^{itq_n}}{1 - e^{itq_n}(1-q_n)} = \frac{1}{e^{-itq_n}\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_n} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{q_n}(e^{-itq_n} - 1)}.$$

A $\mathcal{L}'$Hospital szabály alkalmazásával adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-itq_n} - 1}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-it)e^{-itq_n}}{1} = -it,$$

és így

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\eta_n}(t) = \frac{1}{1-it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ez utóbbi karakterisztikus függvény pedig nem más, mint a $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlás karakterisztikus függvénye, és így

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n < x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0.$$

□

2.6.10. Feladat. (Rényi [2], 3.3.9.) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Mutassuk meg a karakterisztikus függvények módszerével, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. Először azt ellenőrizzük le, hogy az

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u$$

függvény tényleg eloszlásfüggvény. A monoton növekvőség, a balról folytonosság, és az, hogy a $-\infty$-ben a határértéke 0 triviálisan teljesül. Egyedül azt kell csak leellenőrizni, hogy a $+\infty$-ben a határértéke 1. Ez teljesül is, hiszen az $u = t/\sqrt{2}$ helyettesítés után

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathrm{d}t = 1.$$

Azaz tényleg eloszlásfüggvényt adtunk meg, mely abszolút folytonos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ sűrűségfüggvénnyel. Meghatározzuk ezen sűrűségfüggvényhez tartozó karakterisztikus függvényt. Az $x = u/\sqrt{2}$ helyettesítést végrehajtva

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\,\mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu/\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathsf{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t/\sqrt{2})u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,\mathsf{d}u = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = e^{-(t/\sqrt{2})^2/2} = e^{-t^2/4}, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Látjuk, hogy a határeloszlás 0 várható értékű és $\frac{1}{2}$ szórásnégyzetű normális eloszlás. A feltételek miatt $\mathbb{E}X_1 = 0$, és

$$\mathbb{D}^2 X_1 = \mathbb{E}X_1^2 = 1^2\frac{1}{4} + (-1)^2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

A folytonossági tétel alapján elég azt megmutatni, hogy

$$\varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}}(t) \to e^{-t^2/4}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} &= \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{4}e^{it} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Big(\cos(t) - i\sin(t) + \cos(t) + i\sin(t)\Big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t) = \frac{1+\cos(t)}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \mathbb{E}e^{i(t/\sqrt{n})S_n} = (\varphi_{X_1}(t/\sqrt{n}))^n = \left(\frac{1+\cos(t/\sqrt{n})}{2}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{n\big(\frac{1}{2}\cos(t/\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\big)}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

A 2.5.12. Lemma alapján elég azt megmutatni, hogy

$$n\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\right) \to -\frac{t^2}{4}, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

A $\mathcal{L}'$Hospital szabály kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n(\cos(t/\sqrt{n}) - 1) &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(t/\sqrt{n}) - 1}{1/n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{-\sin(t/\sqrt{n})\frac{-t}{2n^{3/2}}}{-1/n^2} \\
&= -\frac{t}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(t/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = -\frac{t}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos(t/\sqrt{n})\frac{-t}{2n^{3/2}}}{-1/(2n^{3/2})} \\
&= -\frac{t^2}{4}\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{t^2}{4}.
\end{aligned}$$

Megjegyezük, hogy a feladat állítása azonnal következik a centrális határeloszlás tételből. Ugyanis, a centrális határeloszlás tétel alapján

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\cdot 0}{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}<x\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,\mathsf{d}t,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Legyen $x=\sqrt{2}y$, $y\in\mathbb{R}$, ekkor

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}<y\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y\sqrt{2}}e^{-t^2/2}\,\mathsf{d}t,\quad y\in\mathbb{R},$$

és a $t=\sqrt{2}u$ helyettesítéssel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y\sqrt{2}}e^{-t^2/2}\,\mathsf{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-u^2}\sqrt{2}\,\mathsf{d}u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-u^2}\,\mathsf{d}u.$$

□

2.6.11. Feladat. Adjunk példát olyan ξ_k, $k\in\mathbb{N}$ független valószínűségi változókra, melyekre nem teljesül a centrális határeloszlás tétel! Mi áll az ilyen példák hátterében?

Megoldás. (Major Péter példája) Legyenek ξ_k, $k\in\mathbb{N}$ olyan független valószínűségi változók, hogy

$$P(\xi_k=k)=P(\xi_k=-k)=\frac{1}{2k^2},\quad P(\xi_k=0)=1-\frac{1}{k^2},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Ekkor $\mathbb{E}\xi_k=0$, $\mathbb{E}\xi_k^2=1$, $k\in\mathbb{N}$, és így

$$D_n^2:=\mathbb{D}^2\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{D}^2\xi_k=n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi_k\neq 0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}<+\infty,$$

a Borel–Cantelli-lemma alapján kapjuk, hogy $P\big(\limsup_{k\to\infty}\{\xi_k\neq 0\}\big)=0$, azaz 1-valószínűséggel csak véges sok indexre teljesül az, hogy $\xi_k(\omega)\neq 0$, és ezért 1-valószínűséggel $\sup_{n\geqslant 1}|S_n(\omega)|<+\infty$. Így, felhasználva, hogy $D_n=\sqrt{n}\to+\infty$, kapjuk, hogy

$$P\Big(\frac{S_n}{D_n}\to 0\Big)=1.$$

Megjegyezzük, hogy minden ilyen példa hátterében az áll, hogy bizonyos valószínűségi változók kis valószínűséggel rendkívül nagy értéket vesznek fel. Ezek a rendkívüli értékek csak nagyon kis mértékben befolyásolják a normalizált összeg eloszlását, de nagyon befolyasolják az összeg szórásnégyzetét. □

2.7. Feltételes várható érték és martingálok

Ebben a részben sok feladat és megoldása *Móri Tamás: Diszkrét paraméterű martingálok című jegyzetéből [7]*, illetve *Prokaj Vilmostól* származik. Az alábbiakban a teljesség kedvéért újra felírjuk a martingál definícióját és felelevenítjük a feltételes várható érték legfontosabb tulajdonságait.

2.7.1. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező,* $(X, \mathcal{X})$ *egy mérhető tér és* $T \neq \emptyset$ *egy tetszőleges nemüres halmaz. Legyen adva minden* $t \in T$ *értékére egy* $\xi_t : \Omega \to X$ *mérhető függvény. Ekkor ezek* $\{\xi_t : t \in T\}$ *együttesét* **sztochasztikus folyamatnak** *nevezzük. A* T *halmazt* **paraméterhalmaznak**, $\mathcal{X}$*-t pedig* **fázistérnek** *vagy* **állapottérnek** *nevezzük.*

2.7.2. Definíció. *Legyen* $T \subseteq [0, +\infty)$ *és* $(\Omega, \mathcal{A})$ *egy mérhető tér. Az* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *rész* σ*-algebra családot filtrációnak nevezzük, ha monoton növekvő, azaz ha*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}, \qquad \text{ha} \quad s < t, \ s, t \in T.$$

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t : t \in T\}$ *sztochasztikus folyamat adaptált az* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *filtrációra nézve, ha* ξ_t $\mathcal{F}_t$*-mérhető minden* $t \in T$ *esetén. Az* $\mathcal{F}_t^\xi := \sigma(\xi_s, s \leqslant t, s \in T)$, $t \in T$ *filtrációt az* $\{\xi_t : t \in T\}$ *sztochasztikus folyamat természetes filtrációjának hívjuk.*

2.7.3. Megjegyzés. Az $\mathcal{F}_t^\xi := \sigma(\xi_s, s \leqslant t, s \in T)$, $t \in T$ definíció tényleg filtrációt ad meg. □

2.7.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\{\xi_t : t \in T\}$ *valós értékű sztochasztikus folyamat* **martingál** *az* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *filtrációra nézve, ha*

(i) $\{\xi_t : t \in T\}$ *adaptált* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$*-re nézve,*

(ii) $\mathbb{E}|\xi_t| < +\infty$, $t \in T$,

(iii) $\mathbb{E}(\xi_t | \mathcal{F}_s) = \xi_s$ *P-m.m. bármilyen* $s < t$, $s, t \in T$ *esetén (*$s = t$*-re is igaz).*

Azt mondjuk, hogy $\{\xi_t : t \in T\}$ *önmagában martingál, ha martingál a természetes filtrációjára nézve.*

A feltételes várható érték fogalmának rövid áttekintése.

2.7.5. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező,* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *rész-*σ*-algebra, és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$. *Azt mondjuk, hogy a* $\xi_{\mathcal{F}} : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó a* ξ **feltételes várható értéke az** $\mathcal{F}$ **feltételre nézve**, *ha*

(i) $\xi_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$*-mérhető,* $\mathbb{E}|\xi_{\mathcal{F}}| < +\infty$,

(ii) *minden* $A \in \mathcal{F}$ *esemény esetén* $\mathbb{E}(\xi_{\mathcal{F}} \mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}_A)$.

2.7.6. Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező,* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *rész-*σ*-algebra, és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$*. Ekkor létezik a* $\xi_{\mathcal{F}} : \Omega \to \mathbb{R}$ *feltételes várható érték az* $\mathcal{F}$ *feltételre nézve, és* P*-m.m. egyértelműen meghatározott.*

A feltételes várható érték fontosabb tulajdonságait az alábbi lemmában foglaljuk össze.

2.7.7. Lemma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező,* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *egy rész-*σ*-algebra. Legyenek* ξ *és* η *olyan valószínűségi változók, hogy* $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$ *és* $\mathbb{E}|\eta| < +\infty$*. Ekkor*

(i) *ha* $\xi \leqslant \eta$ P*-m.m., akkor* $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F}) \leqslant \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathcal{F})$ P*-m.m.,*

(ii) $|\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F})| \leqslant \mathbb{E}(|\xi| \,|\, \mathcal{F})$ P*-m.m.,*

(iii) $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{A}) = \xi$ P*-m.m.,*

(iv) *ha* ξ $\mathcal{F}$*-mérhető is, akkor* $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F}) = \xi$ P*-m.m.,*

(v) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F})] = \mathbb{E}\xi$*,*

(vi) *ha* ξ *független az* $\mathcal{F}$ σ*-algebrától, akkor* $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F}) = \mathbb{E}\xi$ P*-m.m.,*

(vii) *ha* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$ *rész-*σ*-algebra, akkor* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F}) \,|\, \mathcal{T}) = \mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{T})$ P*-m.m., (ez az ún.* **torony-szabály***),*

(viii) *tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *esetén* $\mathbb{E}(a\xi + b\eta \,|\, \mathcal{F}) = a\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F}) + b\mathbb{E}(\eta \,|\, \mathcal{F})$ P*-m.m.,*

(ix) *ha* η $\mathcal{F}$*-mérhető és* $\mathbb{E}|\xi\eta| < +\infty$*, akkor* $\mathbb{E}(\xi\eta \,|\, \mathcal{F}) = \eta\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathcal{F})$ P*-m.m.*

2.7.8. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$*. Legyen továbbá* $\eta : \Omega \to X$ *egy tetszőleges valószínűségi változó, ahol* $(X, \mathcal{X})$ *egy mérhető tér. Ekkor a* ξ **feltételes várható értéke az** η**-ra nézve** $\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta) := \mathbb{E}(\xi \,|\, \sigma(\eta))$*.*

2.7.9. Lemma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$*. Legyen továbbá* $\eta : \Omega \to X$ *egy tetszőleges valószínűségi változó, ahol* $(X, \mathcal{X})$ *egy mérhető tér. Ekkor létezik olyan* $f : X \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény, melyre* $\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta) = f(\eta)$ P*-m.m. Ez az a* P_η*-m.m. egyértelműen meghatározott* $f : X \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény, melyre tetszőleges* $B \in \mathcal{X}$ *esetén teljesül, hogy*

$$\int_B f(y)\, P_\eta(\mathsf{d}y) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}_{\eta^{-1}(B)}),$$

ahol P_η *az* η *eloszlását jelöli, azaz minden* $B \in \mathcal{X}$ *esetén* $P_\eta(B) := P(\eta \in B)$*.*

A gyakorlati példák megoldása során fontos szerephez jut a következő állítás.

2.7.10. Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$*. Legyen továbbá* $\eta : \Omega \to X$ *egy tetszőleges valószínűségi változó, ahol* $(X, \mathcal{X})$ *egy mérhető tér. Ekkor*

(i) *ha* $g : X \to \mathbb{R}$ *olyan mérhető függvény, melyre* $\mathbb{E}|\xi g(\eta)| < +\infty$, *akkor* $\mathbb{E}(\xi g(\eta) \,|\, \eta = y) = g(y)\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta = y)$ P_η*-m.m.* $y \in X$,

(ii) *ha* ξ *és* η *függetlenek és* $g : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ *olyan mérhető függvény, hogy* $\mathbb{E}|g(\xi, \eta)| < +\infty$, *akkor* $\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \,|\, \eta = y) = \mathbb{E}g(\xi, y)$ P_η*-m.m.* $y \in X$.

2.7.11. Megjegyzés. Abban a speciális esetben mikor $(X, \mathcal{X}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ valószínűségi vektorváltozó az előző állítások az alábbiakat adják. Beszélhetünk ξ-nek az $\eta_1, \dots, \eta_n$ valószínűségi változókra vonatkozó feltételes várható értékéről oly módon, hogy az $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)$ valószínűségi vektorváltozóra vonatkozóan veszünk feltételt, formálisan

$$\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta_1, \dots, \eta_n) := \mathbb{E}(\xi \,|\, \eta) := \mathbb{E}(\xi \,|\, \sigma(\eta)) := \mathbb{E}(\xi \,|\, \sigma(\eta_1, \dots, \eta_n)).$$

Kapjuk, hogy létezik olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, melyre

$$\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta_1, \dots, \eta_n) = f(\eta_1, \dots, \eta_n) \quad \text{P-m.m.}$$

Ez az a P_η-m.m. $y \in \mathbb{R}^n$ esetén egyértelműen meghatározott $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, melyre tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén teljesül, hogy

$$\int_B f(y)\, P_\eta(\mathrm{d}y) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{I}_{\eta^{-1}(B)}),$$

ahol P_η az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlását jelöli, azaz minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ esetén $P_\eta(B) = P(\eta \in B)$.

Azt is kapjuk, hogy ha $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ és $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^n$ független valószínűségi változók és $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan Borel-mérhető függvény, hogy $\mathbb{E}|g(\xi, \eta)| < +\infty$, akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta) \,|\, \eta = y) = \mathbb{E}g(\xi, y) \qquad P_\eta\text{-m.m. } y \in \mathbb{R}^n.$$

□

2.7.12. Definíció. *Legyenek* X *és* Y *valószínűségi változók, hogy* $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. *Ekkor* **X-nek Y-ra vonatkozó feltételes varianciáján** *a*

$$\operatorname{Var}(X \,|\, Y) := \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X \,|\, Y))^2 \,|\, Y\Big)$$

valószínűségi változót értjük.

2.7.13. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező és X olyan valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ olyan rész-σ-algebra, hogy $\mathcal{F}$ független $\sigma(X)$-től. Létezik-e olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre $P(\mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{F}) = c) = 1$?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:* legyen $c := \mathbb{E}X$. □

2.7.14. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. Létezik-e olyan X valószínűségi változó, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra, hogy X L^1-normája kisebb, mint $\mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{F})$ L^1-normája?

Megoldás. A válasz: **Nem.** *Indoklás:* A Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$|\mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{F})| \leqslant \mathbb{E}(|X| \,|\, \mathcal{F}) \quad \text{P-m.m.}$$

Így mindkét oldal várható értékét véve

$$\mathbb{E}\left(|\mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{F})|\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|X| \,|\, \mathcal{F})\right) = \mathbb{E}|X|.$$

□

2.7.15. Feladat. Mutassuk meg, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor martingál, ha

(i) $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ adaptált az $\{\mathcal{F}_n^\xi, n \in \mathbb{N}\}$ filtrációra nézve,

(ii) $\mathbb{E}|\xi_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\mathbb{E}(\xi_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) = \xi_n$ P-m.m., $n \in \mathbb{N}$.

Megoldás. Ha a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikus folyamat martingál, akkor a martingálság definíciója folytán nyilván teljesülnek az (i), (ii) és (iii) tulajdonságok.

Tegyük most fel, hogy $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melyre teljesülnek az (i), (ii) és (iii) tulajdonságok. Felhasználva, hogy $\mathcal{F}_n^\xi \subseteq \mathcal{F}_{n+1}^\xi$, $n \in \mathbb{N}$, teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi_{n+k} \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) = \xi_n, \quad \text{P-m.m.} \quad n \geqslant 1, k \geqslant 1. \tag{2.7.46}$$

Legyen $n \geqslant 1$ rögzített. Ekkor $k = 1$-re a (iii) feltétel miatt teljesül (2.7.46). Tegyük fel, hogy (2.7.46) igaz $1, 2, \ldots, k$-ra, és mutassuk meg, hogy igaz $k+1$-re is. Valóban,

$$\mathbb{E}(\xi_{n+k+1} \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\xi_{n+k+1} \,|\, \mathcal{F}_{n+1}^\xi) \,|\, \mathcal{F}_n^\xi\Big) = \mathbb{E}(\xi_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^\xi) = \xi_n \quad \text{P-m.m.},$$

ahol a 2. egyenlőség az indukciós feltevés miatt következik (n+k+1-(n+1)=k), illetve azt is használtuk még, hogy két P-m.m. egyenlő valószínűségi változónak ugyanazon σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értéke P-m.m. ugyanaz. □

2.7.16. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, nemnegatív valószínűségi változók, melyek ugyanazon a valószínűségi mezőn vannak definiálva és $\mathbb{E}X_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Igaz-e, hogy $M_n := \prod_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$ martingál az $\mathcal{F}_n := \sigma(X_i, i = 1, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$ filtrációra nézve?

Megoldás. A válasz: **Igen.** *Indoklás:*

$$\mathbb{E}(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}M_n\,|\,\mathcal{F}_n) = M_n\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = M_n\mathbb{E}X_{n+1} = M_n.$$

□

2.7.17. Feladat. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, ahol λ a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en. Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ egy Borel-mérhető függvény. Határozzuk meg f-nek a $\{[0,1/3), [1/3,2/3), [2/3,1]\}$ partíció által generált σ-algebrára vonatkozó feltételes várható értékét!

Megoldás. Jelölje $\mathcal{F}$ a szóban forgó σ-algebrát. Ekkor

$$\mathcal{F} = \{[0,1/3), [1/3,2/3), [2/3,1], [0,2/3), [0,1/3)\cup[2/3,1], [1/3,1], [0,1], \emptyset\}.$$

A feltételes várható érték tulajdonságai miatt az $\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{F}) : \Omega \to \mathbb{R}$ feltételes várható érték olyan $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mérhető leképezés melyre $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{F})\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(f\mathbb{1}_A)$ minden $A \in \mathcal{F}$ esetén. Így

$$\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{F})(\omega) = c_1\mathbb{1}_{[0,1/3)}(\omega) + c_2\mathbb{1}_{[1/3,2/3)}(\omega) + c_3\mathbb{1}_{[2/3,1]}(\omega), \qquad \omega \in [0,1],$$

ahol

$$\begin{aligned}
c_1 &= \mathbb{E}(f\,|\,[0,1/3)) = \frac{\mathbb{E}(f\mathbb{1}_{[0,1/3)})}{\lambda([0,1/3))} = \frac{\int_0^{1/3} f(x)\,\mathsf{d}x}{1/3-0} = 3\int_0^{1/3} f(x)\,\mathsf{d}x,\\
c_2 &= \mathbb{E}(f\,|\,[1/3,2/3)) = \frac{\mathbb{E}(f\mathbb{1}_{[1/3,2/3)})}{\lambda([1/3,2/3))} = \frac{\int_{1/3}^{2/3} f(x)\,\mathsf{d}x}{2/3-1/3} = 3\int_{1/3}^{2/3} f(x)\,\mathsf{d}x,\\
c_3 &= \mathbb{E}(f\,|\,[2/3,1]) = \frac{\mathbb{E}(f\mathbb{1}_{[2/3,1]})}{\lambda([2/3,1])} = \frac{\int_{2/3}^{1} f(x)\,\mathsf{d}x}{1-2/3} = 3\int_{2/3}^{1} f(x)\,\mathsf{d}x.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a c_i, $i = 1,2,3$, konstansok úgy vannak megválasztva, hogy az $1/3$ és c_i oldalhosszúságu téglalapok területe rendre megegyezzen az f függvénynek a $[0,1/3)$, $[1/3,2/3)$, ill. $[2/3,1]$ intervallumokhoz tartozó görbe alatti területeivel. □

2.7.18. Feladat. Legyen (X,Y) egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ egységkörlapon. Határozzuk meg az $\mathbb{E}(X^4\,|\,Y)$ feltételes várható értéket!

Megoldás. Jelölje X-nek Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét $f_{X\,|\,Y}$. Ekkor

$$\mathbb{E}(X^4\,|\,Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{X\,|\,Y}(x|y)\,\mathsf{d}x, \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Valóban, a 2.7.9. Lemma alapján elég azt ellenőriznünk, hogy tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$\int_B f(y)\,P_Y(\mathsf{d}y) = \mathbb{E}(X^4\mathbb{I}_{Y^{-1}(B)}),$$

ahol
$$f(y) := \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,\mathsf{d}x, \qquad y \in \mathbb{R}.$$
A fenti egyenlőség bal oldala:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,\mathsf{d}x\right)\mathbb{I}_B(y)\,P_Y(\mathsf{d}y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,\mathsf{d}x\right)\mathbb{I}_B(y) f_\eta(y)\,\mathsf{d}y$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_{X,Y}(x,y)\,\mathsf{d}x\right)\mathbb{I}_B(y)\,\mathsf{d}y = \mathbb{E}(X^4\mathbb{I}_{\{Y\in B\}}) = \mathbb{E}(X^4\mathbb{I}_{Y^{-1}(B)}).$$
Meghatározzuk most $f_{X\,|\,Y}$-t. Az (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{ha } (x,y)\in D,\\ 0 & \text{ha } (x,y)\notin D,\end{cases}$$
illetve Y sűrűségfüggvénye:
$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathsf{d}x = \displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,\mathsf{d}x = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & \text{ha } y\in[-1,1],\\ 0 & \text{ha } y\notin[-1,1]\end{cases}$$
Így
$$f_{X\,|\,Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & \text{ha } (x,y)\in D,\\ 0 & \text{ha } (x,y)\notin D.\end{cases}$$
Ezért $\mathbb{E}(X^4\,|\,Y=y)=0$, ha $y\notin(-1,1)$, illetve, ha $y\in(-1,1)$, úgy
$$\mathbb{E}(X^4\,|\,Y=y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^4\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{(1-y^2)^2}{5}.$$
Így $\mathbb{E}(X^4\,|\,Y) = \frac{(1-Y^2)^2}{5}$. □

2.7.19. Feladat. Legyenek X, Y és Z független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda>0$, $\mu>0$, illetve $\nu>0$ paraméterekkel. A feltételes várható érték tulajdonságait használva határozzuk meg a $P(X<Y<Z)$ valószínűséget!

Megoldás. Nyilván
$$P(X<Y<Z) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X<Y<Z\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X<\min(Y,Z)\}}\mathbb{1}_{\{Y<Z\}}] = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{Y<Z\}}\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{X<\min(Y,Z)\}}\,|\,Y,Z\Big)\Big).$$
Mivel X,Y és Z függetlenek, a 2.7.10. Állítás (ii) része alapján, Lebesgue majdnem minden $y>0$, $z>0$ esetén
$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{X<\min(Y,Z)\}}\,|\,Y=y,Z=z\Big) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X<\min(y,z)\}}] = P(X<\min(y,z)) = 1-e^{-\lambda\min(y,z)}.$$

Így
$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{X<\min(Y,Z)\}}\,|\,Y,Z\Big) = 1 - e^{-\lambda\min(Y,Z)}.$$
Ezért
$$P(X<Y<Z) = \mathbb{E}\Big(\Big(1-e^{-\lambda\min(Y,Z)}\Big)\mathbb{1}_{\{Y<Z\}}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(\Big(1-e^{-\lambda\min(Y,Z)}\Big)\mathbb{1}_{\{Y<Z\}}\,|\,Y\Big)\Big).$$
Újra a 2.7.10. Állítás (ii) része alapján, Lebesgue majdnem minden $y>0$ esetén
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\Big(1-e^{-\lambda\min(Y,Z)}\Big)\mathbb{1}_{\{Y<Z\}}\,|\,Y=y\Big) &= \mathbb{E}\Big(\Big(1-e^{-\lambda\min(y,Z)}\Big)\mathbb{1}_{\{y<Z\}}\Big)\\
&= P(y<Z) - \mathbb{E}\Big(e^{-\lambda\min(y,Z)}\mathbb{1}_{\{y<Z\}}\Big)\\
&= e^{-\nu y} - \int_y^\infty e^{-\lambda\min(y,z)}\nu e^{-\nu z}\,\mathsf{d}z\\
&= e^{-\nu y} - e^{-\lambda y}P(Z>y) = e^{-\nu y} - e^{-\lambda y}e^{-\nu y}\\
&= e^{-\nu y}(1-e^{-\lambda y}).
\end{aligned}$$
Így
$$P(X<Y<Z) = \mathbb{E}[e^{-\nu Y}(1-e^{-\lambda Y})] = \mathbb{E}e^{-\nu Y} - \mathbb{E}e^{-(\nu+\lambda)Y}.$$
Felhasználva, hogy tetszőleges $s>0$ esetén
$$\mathbb{E}e^{-sY} = \int_0^\infty e^{-sy}\mu e^{-\mu y}\,\mathsf{d}y = \mu\int_0^\infty e^{-(s+\mu)y}\,\mathsf{d}y = \mu\left[\frac{e^{-(s+\mu)y}}{-(s+\mu)}\right]_0^\infty = \frac{\mu}{s+\mu},$$
kapjuk, hogy
$$P(X<Y<Z) = \frac{\mu}{\nu+\mu} - \frac{\mu}{\nu+\lambda+\mu} = \frac{\mu\lambda}{(\mu+\nu)(\lambda+\mu+\nu)}.$$
□

2.7.20. Feladat. (Prokaj Vilmos feladata, (c) rész) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy
$$P(X_1=1) = P(X_1=-1) = \frac{1}{2}.$$
Legyen $S_n := X_1+\cdots+X_n$, $n\geqslant 0$ és $S_0 := 0$. (Ekkor S_n felfogható a számegyenes egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan bolyongó részecske helyzetének az n. lépés után.) Mutassuk meg, hogy

(a) $\{S_n, n\geqslant 0\}$ martingál,

(b) $\{S_n^2 - n, n\geqslant 0\}$ martingál,

(c) $\{e^{S_n}(\cosh(1))^{-n}, n\geqslant 0\}$ martingál,

(d) $\left\{\frac{\cos(\lambda(S_n-a))}{(\cos(\lambda))^n}, n \geqslant 0\right\}$ martingál a $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 0$, filtrációra nézve, ahol $a, \lambda \in \mathbb{R}$, hogy $\cos(\lambda) \neq 0$,

(e) $\{\sum_{i=1}^n S_i - \frac{1}{3}S_n^3, n \geqslant 0\}$ martingál a $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 0$, filtrációra nézve!

Megoldás. S_n definíciója folytán $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geqslant 1$. Legyen $\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 0$.

(a) Azt kell megmutatni, hogy az 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételei teljesülnek.
(i): $\mathcal{F}_n^S$ definíciója miatt S_n $\mathcal{F}_n^S$-mérhető.
(ii):

$$\mathbb{E}|S_n| \leqslant \mathbb{E}|X_1| + \cdots + \mathbb{E}|X_n| = n\mathbb{E}|X_1| = n\left(1\frac{1}{2} + |(-1)|\frac{1}{2}\right) = n < +\infty.$$

Megjegyezzük, hogy mivel S_n véges sok értéket felvevő diszkrét valószínűségi változó, $\mathbb{E}|S_n| < +\infty$ automatikusan teljesül. A fentiekben úgy láttuk ezt be, hogy egy felső becslést adtunk $\mathbb{E}|S_n|$-re. Ezt más feladatoknál is gyakran így csináljuk.

A (iii) feltétel teljesüléséhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) = S_n \quad \text{P-m.m.}, \quad n \geqslant 0.$$

Mivel S_n $\mathcal{F}_n^S$-mérhető és X_{n+1} független $\mathcal{F}_n^S$-től,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) &= \mathbb{E}(X_{n+1} + S_n \,|\, \mathcal{F}_n^S) = \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) + \mathbb{E}(S_n \,|\, \mathcal{F}_n^S)\\ &= \mathbb{E}(X_{n+1}) + S_n = (1 \cdot 1/2 + (-1)1/2) + S_n = 0 + S_n = S_n.\end{aligned}$$

Miért csak az állítható, hogy $\mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) = S_n$ P-m.m. (miért nem minden $\omega \in \Omega$-ra)? Azért, mert $\mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S)$ eleve csak P-m.m. $\omega \in \Omega$-ra van egyértelműen definiálva és a felhasznált azonosságok is csak P-m.m. igazak.

(b) Legyen $Y_n := S_n^2 - n$, $n \geqslant 0$ és $\mathcal{F}_n^Y := \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$, $n \geqslant 0$. Azt kell megmutatni, hogy az 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételei teljesülnek.
(i): $\mathcal{F}_n^Y$ definíciója miatt Y_n $\mathcal{F}_n^Y$-mérhető.
(ii): Mivel $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek és $\mathbb{E}X_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y_n| = \mathbb{E}|S_n^2 - n| \leqslant \mathbb{E}S_n^2 + n &= n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_iX_j) = n + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2\\ &= n + n\mathbb{E}X_1^2 = n + n \cdot 1 = 2n < +\infty.\end{aligned}$$

A (iii) feltétel teljesüléséhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^Y) = Y_n \quad \text{P-m.m.}, \qquad n \geqslant 0.$$

Először az $\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S)$ feltételes várható értéket számoljuk ki. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) &= \mathbb{E}(S_{n+1}^2 - (n+1) \,|\, \mathcal{F}_n^S) = \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2 - (n+1) \,|\, \mathcal{F}_n^S)\\ &= \mathbb{E}(S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2 - n - 1 \,|\, \mathcal{F}_n^S).\end{aligned}$$

Mivel S_n $\mathcal{F}_n^S$-mérhető, és X_{n+1} független $\mathcal{F}_n^S$-től kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^S) &= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^S) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - n - 1\,|\,\mathcal{F}_n^S)\\ &= S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}X_{n+1} + \mathbb{E}X_{n+1}^2 - n - 1 = S_n^2 + 2S_n\cdot 0 + 1 - n - 1 = S_n^2 - n = Y_n.\end{aligned}$$

Végiggondoljuk, hogy $\mathcal{F}_n^Y \subseteq \mathcal{F}_n^S$, $n \geqslant 0$. Ehhez elég azt belátni, hogy $\sigma(Y_n) \subseteq \sigma(S_n)$, $n \geqslant 0$. Mivel $Y_n = f_n(S_n)$, ahol $f_n(x) = x^2 - n$, a generált σ-algebra definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sigma(Y_n) &= \{Y_n^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{(f_n \circ S_n)^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\\ &= \{S_n^{-1}(f_n^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subseteq \{S_n^{-1}(C), C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} := \sigma(S_n).\end{aligned}$$

A torony-szabály felhasználásával

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = \mathbb{E}(Y_n\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = Y_n,$$

mivel Y_n $\mathcal{F}_n^Y$-mérhető.

(c) Azt mutatjuk meg, hogy tetszőlegesen rögzített $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\Big\{e^{tS_n}(\cosh(t))^{-n}, n \geqslant 0\Big\} \qquad \text{martingál.}$$

Legyen $Y_n = e^{tS_n}(\cosh(t))^{-n}$, $n \geqslant 0$ és $\mathcal{F}_n^Y := \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$, $n \geqslant 0$. Ekkor $\mathcal{F}_n^Y \subseteq \mathcal{F}_n^S$, $n \geqslant 0$. Azt kell megmutatni, hogy az 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételei teljesülnek.

(i): $\mathcal{F}_n^Y$ definíciója miatt Y_n $\mathcal{F}_n^Y$–mérhető.

(ii): Mivel $S_n \leqslant n$, P-m.m., így

$$\mathbb{E}|Y_n| = \mathbb{E}|e^{tS_n}(\cosh(t))^{-n}| = \mathbb{E}\Big(e^{tS_n}(\cosh(t))^{-n}\Big) \leqslant e^{tn}(\cosh(t))^{-n} < +\infty.$$

A (iii) feltétel teljesüléséhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = Y_n \quad \text{P-m.m.,} \qquad n \geqslant 0.$$

Vizsgáljuk először az $\mathbb{E}(e^{tS_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n^S)$ feltételes várható értéket. Mivel S_n $\mathcal{F}_n^S$-mérhető és X_{n+1} független $\mathcal{F}_n^S$-től kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{tS_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n^S) &= \mathbb{E}(e^{tX_{n+1}}e^{tS_n}\,|\,\mathcal{F}_n^S) = e^{tS_n}\mathbb{E}(e^{tX_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n^S) = e^{tS_n}\mathbb{E}(e^{tX_{n+1}})\\ &= e^{tS_n}(e^{1t}1/2 + e^{-1t}1/2) = e^{tS_n}\cosh(t) = Y_n\cosh(t)^n\cosh(t) = Y_n(\cosh(t))^{n+1}.\end{aligned}$$

Így a torony-szabály alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^Y) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(e^{tS_{n+1}}(\cosh(t))^{-n-1}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\Big)\\ &= (\cosh(t))^{-n-1}\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(e^{tS_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\Big) = (\cosh(t))^{-n-1}\mathbb{E}(Y_n(\cosh(t))^{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^Y)\\ &= \mathbb{E}(Y_n\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = Y_n.\end{aligned}$$

(d) Legyen $Y_n := \frac{\cos(\lambda(S_n-a))}{(\cos(\lambda))^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Azt kell megmutatni, hogy a 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételei teljesülnek.

(i): $\mathcal{F}_n^S$ definíciója miatt Y_n $\mathcal{F}_n^S$-mérhető.

(ii): mivel $|\cos(x)| \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy $\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant \frac{1}{|\cos(\lambda)|^n}$, $n \geqslant 0$.

A (iii) feltétel teljesüléséhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) = Y_n \quad \text{P-m.m.}, \qquad n \geqslant 0.$$

Felhasználva, hogy S_n és X_{n+1} függetlenek és S_n $\mathcal{F}_n^S$-mérhető minden $n \geqslant 0$ esetén, és $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) &= \frac{1}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \mathbb{E}\left(\cos\left(\lambda(S_n + X_{n+1} - a)\right) \,|\, \mathcal{F}_n\right) \\
&= \frac{1}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \mathbb{E}\left(\cos\left(\lambda(y + X_{n+1} - a)\right)\right)\Big|_{y=S_n} \\
&= \frac{1}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\lambda(y+1-a)\right) + \cos\left(\lambda(y-1-a)\right)\right)\Big|_{y=S_n} \\
&= \frac{1}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \cos(\lambda(y-a))\cos(\lambda)\Big|_{y=S_n} \\
&= \frac{1}{(\cos(\lambda))^{n}} \cos\left(\lambda(S_n - a)\right) = Y_n \quad \text{P-m.m.}
\end{aligned}$$

A (iii) feltételt egy kicsit másképpen is leellenőrizzük: minden $n \geqslant 0$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^S) &= \mathbb{E}\left(\frac{\cos\left(\lambda(S_n - a) + \lambda X_{n+1}\right)}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \,\Big|\, \mathcal{F}_n^S\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{\cos\left(\lambda(S_n - a)\right)\cos(\lambda X_{n+1}) - \sin\left(\lambda(S_n - a)\right)\sin(\lambda X_{n+1})}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \,\Big|\, \mathcal{F}_n^S\right) \\
&= \frac{\cos\left(\lambda(S_n - a)\right)}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \mathbb{E}(\cos(\lambda X_{n+1})) - \frac{\sin\left(\lambda(S_n - a)\right)}{(\cos(\lambda))^{n+1}} \mathbb{E}(\sin(\lambda X_{n+1})) \\
&= \frac{\cos\left(\lambda(S_n - a)\right)}{(\cos(\lambda))^{n}} = Y_n \quad \text{P-m.m.},
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathbb{E}(\cos(\lambda X_{n+1})) = \cos(\lambda)$ és $\mathbb{E}(\sin(\lambda X_{n+1})) = \sin(\lambda)\frac{1}{2} + \sin(-\lambda)\frac{1}{2} = 0$.

(e) Legyen $Y_n := \sum_{i=1}^n S_i - \frac{1}{3}S_n^3$, $n \in \mathbb{N}$. Azt kell megmutatni, hogy a 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételei teljesülnek.

(i): $\mathcal{F}_n^S$ definíciója miatt Y_n $\mathcal{F}_n^S$-mérhető.

(ii): tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|S_i|) + \frac{1}{3}\mathbb{E}(|S_n|^3) \leqslant \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{3}n^3 < \infty.$$

A (iii) feltétel teljesüléséhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}^S_{n-1}) = Y_{n-1} \quad \text{P-m.m.}, \qquad n \geqslant 1.$$

Tetszőleges $n \geqslant 1$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}^S_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} S_i + S_n - \frac{1}{3}(S_{n-1} + X_n)^3 \,\Big|\, \mathcal{F}^S_{n-1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} S_i + \mathbb{E}(S_n \,|\, \mathcal{F}^S_{n-1}) - \frac{1}{3}\mathbb{E}(S^3_{n-1} + 3S^2_{n-1}X_n + 3S_{n-1}X^2_n + X^3_n \,|\, \mathcal{F}^S_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} S_i + S_{n-1} + \mathbb{E}(X_n) - \frac{1}{3}(S^3_{n-1} + 3S^2_{n-1}\mathbb{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}^S_{n-1}) + 3S_{n-1}\mathbb{E}(X^2_n \,|\, \mathcal{F}^S_{n-1}) + \mathbb{E}(X^3_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} S_i + S_{n-1} - \frac{1}{3}(S^3_{n-1} + 3S^2_{n-1}\mathbb{E}(X_n) + 3S_{n-1}\mathbb{E}(X^2_n) + \mathbb{E}(X^3_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} S_i + S_{n-1} - \frac{1}{3}(S^3_{n-1} + 3S_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} S_i - \frac{1}{3}S^3_{n-1} = Y_{n-1}, \quad \text{P-m.m.},
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\mathbb{E}(X^2_n) = 1$ és $\mathbb{E}(X^3_n) = 0$. □

2.7.21. Feladat. (Prokaj Vilmos feladata) Legyen $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy olyan sztochasztikus folyamat, melyre $\mathbb{E}|X_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ és $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ egy olyan rész-σ-algebra sorozat, hogy $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ martingál (a természetes filtrációjára nézve).

Megoldás. A feladat azt mondja, hogy ha egy valószínűségi változó sorozat valamilyen monoton növekvő rész-σ-algebra sorozattal martingál, akkor a természetesen adódó σ-algebra sorozattal is az.

Azt kell belátni, hogy az 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételei teljesülnek.

(i): $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ definíciója miatt X_n $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$–mérhető.

(ii): $\mathbb{E}|X_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$ a feltétel miatt igaz.

(iii): Azt kell belátni, hogy

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \sigma(X_1, \ldots, X_n)) = X_n \quad \text{P-m.m.}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n, n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy X_n $\mathcal{F}_n$-mérhető, $n \in \mathbb{N}$. Így

$$\sigma(X_1, \ldots, X_n) \subseteq \mathcal{F}_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

hiszen

$$\sigma(X_1) \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_n, \quad \sigma(X_2) \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_n, \quad \cdots \quad \sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n.$$

(Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$ azonosság alatt általában azt értjük, hogy a két oldalon szereplő valószínűségi változó egy valószínűséggel megegyezik. Ez nem jelenti azt, hogy X_n $\mathcal{F}_n$-mérhető volna. Csupán annyit jelent, hogy X_n egy nulla valószínűségű eseményen megváltoztatható úgy, hogy $\mathcal{F}_n$-mérhető legyen. Most is és a továbbiakban is az $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$ azonosságot úgy értjük, hogy a jobboldal egy reprezentánsa a baloldalon megadott valószínűségi változó családnak.)

A torony-szabály felhasználásával, felhasználva azt is, hogy $\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$ kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \sigma(X_1, \ldots, X_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \,|\, \sigma(X_1, \ldots, X_n)) = \mathbb{E}(X_n \,|\, \sigma(X_1, \ldots, X_n)) = X_n,$$

hiszen X_n $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$-mérhető. □

2.7.22. Feladat. (Móri [7], 49. Feladat) Adott a síkon egy háromszög. Vegyünk fel az oldalain egy-egy pontot véletlenszerűen, egymástól függetlenül, majd az általuk meghatározott háromszöget nagyítsuk a kétszeresére. Az új háromszöggel ismételjük meg az eljárást, és így tovább. Jelölje T_n az n-edik lépésben kapott háromszög területét. Mutassuk meg, hogy $\{T_n : n \geqslant 0\}$ martingál, ahol T_0 a megadott háromszög területét jelöli.

Megoldás. Legyen a háromszög három csúcsa A, B, C; az osztópontok pedig $P \in AB$, $Q \in BC$, és $R \in CA$. Lásd a példatár végén található 10. ábrát! Mivel az osztópontokat az egyes oldalakról véletlenszerűen választjuk, egymástól függetlenül, a három osztópont egy-egy, egymástól független $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változóval írható le. Legyen tehát

$$X := \frac{AP}{AB}, \qquad Y := \frac{BQ}{BC}, \qquad Z := \frac{CR}{CA},$$

ekkor X, Y, Z egymástól független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Vegyük észre, hogy az $APC\triangle$ területének és az $ABC\triangle$ területének aránya

$$\frac{t_{APC\triangle}}{t_{ABC\triangle}} = \frac{AP \cdot m_C/2}{AB \cdot m_C/2} = \frac{AP}{AB} = X,$$

ahol m_C a C csúcshoz tartozó magasságot jelöli az $ABC\triangle$-ben. Hasonlóan

$$\frac{t_{APR\triangle}}{t_{APC\triangle}} = \frac{AR \cdot m_P/2}{AC \cdot m_P/2} = \frac{AR}{AC} = \frac{AC - CR}{AC} = 1 - Z,$$

ahol m_P a P csúcshoz tartozó magasságot jelöli az $APC\triangle$-ben.

Így az A csúcsnál levágott $APR\triangle$ területe az $ABC\triangle$ területének $X(1 - Z)$-szerese, ugyanis

$$\frac{t_{APR\triangle}}{t_{ABC\triangle}} = \frac{t_{APR\triangle}}{t_{APC\triangle}} \frac{t_{APC\triangle}}{t_{ABC\triangle}} = (1 - Z)X.$$

Hasonlóan végiggondolható, hogy az egyes csúcsoknál elhagyott háromszögek összterülete az $ABC\triangle$ területének

$$X(1 - Z) + Y(1 - X) + Z(1 - Y)\text{-szerese.}$$

Legyen $\mathcal{F}_n^T := \sigma(T_0, \dots, T_n)$, $n \geqslant 0$. Nyilván T_n $\mathcal{F}_n^T$–mérhető és $\mathbb{E}|T_n| < +\infty$, hiszen $|T_n| = T_n \leqslant 4^n T_0$, $n \in \mathbb{N}$, és így $\mathbb{E}|T_n| \leqslant 4^n T_0$, $n \in \mathbb{N}$. Így csak azt kell végiggondolni, hogy

$$\mathbb{E}(T_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^T) = T_n \quad \text{P-m.m.}, \qquad n \geqslant 0.$$

Mivel mikor 2-szeresére nagyítunk, a terület 4-szeresére nő kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^T) &= \mathbb{E}\Big(4\big(1 - X(1-Z) - Y(1-X) - Z(1-Y)\big)T_n \,|\, \mathcal{F}_n^T\Big)\\ &= 4T_n\mathbb{E}\Big(1 - X(1-Z) - Y(1-X) - Z(1-Y) \,|\, \mathcal{F}_n^T\Big).\end{aligned}$$

Mivel X, Y és Z $\mathcal{F}_n^T$-től és egymástól is független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^T) &= 4T_n\Big[1 - \mathbb{E}\big(X(1-Z) + Y(1-X) + Z(1-Y)\big)\Big] = 4T_n[1 - 3\mathbb{E}X(1-Z)]\\ &= 4T_n\big(1 - 3(\mathbb{E}X)(1-\mathbb{E}Z)\big) = 4T_n\left(1 - 3\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = T_n.\end{aligned}$$

□

2.7.23. Feladat. (Móri [7], 47. Feladat) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \geqslant 1$ és $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $n \geqslant 1$. Mutassuk meg, hogy

$$\left\{\frac{n! e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}}, n \geqslant 1\right\}$$

martingál az $\{\mathcal{F}_n^X, n \geqslant 1\}$ filtrációra nézve.

Megoldás. Az 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételeit kell leellenőrizni.

(i): Mivel $n! e^{S_n}(1+S_n)^{-n-1}$ $X_1, \dots, X_n$ függvénye, így nyilván $\mathcal{F}_n^X$-mérhető.

(ii): Mivel S_n n-edrendű, 1 paraméterű gamma eloszlású

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\frac{n! e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}}\right| &= \mathbb{E}\frac{n! e^{\Gamma(n,1)}}{(1+\Gamma(n,1))^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{n! e^x}{(1+x)^{n+1}} \frac{1^n x^{n-1} e^{-x}}{(n-1)!}\,\mathsf{d}x\\ &= n\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1} \mathsf{d}x = n\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-n-1} \mathsf{d}x\\ &= -n\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-n-1} \mathsf{d}x = -n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-n}}{-n}\right]_0^{+\infty}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n} = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

A (iii) feltételhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}\left(\frac{n! e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right) = \frac{(n-1)! e^{S_{n-1}}}{(1+S_{n-1})^n} \quad \text{P-m.m.}, \qquad n \geqslant 1.$$

Mivel $S_n = (X_1 + \cdots + X_{n-1}) + X_n$ és X_n független $\mathcal{F}_{n-1}^X = \sigma(X_1, \ldots, X_{n-1})$-től, az 2.7.11. Megjegyzés alapján kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\frac{n!e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}} \mid \mathcal{F}_{n-1}^X\right) = \mathbb{E}\left(\frac{n!e^{(X_1+\cdots+X_{n-1})+X_n}}{(1+(X_1+\cdots+X_{n-1})+X_n)^{n+1}} \mid X_1, \ldots, X_{n-1}\right)$$
$$= h(X_1, \ldots, X_{n-1}),$$

ahol $h : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ az a Borel-mérhető függvény, melyre $P_{(X_1,\ldots,X_{n-1})}$-m.m. $y \in \mathbb{R}^{n-1}$-re

$$h(y) = h(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \mathbb{E}\left(\frac{n!e^{y_1+\cdots+y_{n-1}+X_n}}{(1+y_1+\cdots+y_{n-1}+X_n)^{n+1}}\right).$$

Vezessük be az $y_1 + \cdots + y_{n-1} = \overline{y} \in \mathbb{R}$ jelölést. Mivel X_n exponenciális eloszlású 1 paraméterrel kapjuk, hogy

$$h(y) = \int_0^{+\infty} \frac{n!e^{\overline{y}+x}}{(1+\overline{y}+x)^{n+1}} e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!e^{\overline{y}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\overline{y}+x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= n!e^{\overline{y}}\left[\frac{(1+\overline{y}+x)^{-n}}{-n}\right]_0^{+\infty} = (n-1)!e^{\overline{y}}\left(0 + \frac{1}{(1+\overline{y})^n}\right) = \frac{(n-1)!}{(1+\overline{y})^n}e^{\overline{y}}.$$

Ezért

$$\mathbb{E}\left(\frac{n!e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}} \mid \mathcal{F}_{n-1}^X\right) = \frac{(n-1)!}{(1+X_1+\cdots+X_{n-1})^n}e^{X_1+\cdots+X_{n-1}} = \frac{(n-1)!}{(1+S_{n-1})^n}e^{S_{n-1}} \quad \text{P-m.m.}$$

(Számoljuk ki a

$$\mathbb{E}\left(\frac{n!e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}} \mid X_{n-1}\right)$$

feltételes várható értéket is. Szintén az 2.7.11. Megjegyzés alapján

$$\mathbb{E}\left(\frac{n!e^{S_n}}{(1+S_n)^{n+1}} \mid X_{n-1}\right) = h(X_{n-1}),$$

ahol $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az a Borel-mérhető függvény, melyre $P_{X_{n-1}}$-m.m. $y \in \mathbb{R}$-re

$$h(y) = \mathbb{E}\left(\frac{n!e^{X_1+\cdots+X_{n-2}+y+X_n}}{(1+X_1+\cdots+X_{n-2}+y+X_n)^{n+1}}\right),$$

ugyanis X_{n-1} független $X_1, \ldots, X_{n-2}, X_n$-től.) □

2.7.24. Feladat. (Móri [7], 29. Feladat) Tekintsünk egy egérkét, aki a sík egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan bolyong oly módon, hogy a $(0,0)$-ból indul és minden egész koordinátájú pontból ennek mind a 4 lehetséges egész koordinátájú szomszédjába $1/4$ valószínűséggel ugorhat. Jelölje S_n az egérke helyzetét az n. lépés után ($S_0 = (0,0)$). Mutassuk meg, hogy

$$\left\{\|S_n\|^2 - n, n \geqslant 0\right\}$$

martingál, ahol $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Megoldás. Legyen $X_n := S_n - S_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots,$ és ekkor

$$P(X_n = (0, \pm 1)) = P(X_n = (\pm 1, 0)) = \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Legyen $\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, $n \geqslant 0$. Ekkor X_n független az $\mathcal{F}_{n-1}^S$ σ-algebrától. Ezért az 2.7.11. Megjegyzés alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\langle S_{n-1}, X_n\rangle \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S\right) &= \mathbb{E}\left(\langle S_{n-1}, X_n\rangle \,|\, S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\langle S_{n-1}, X_n\rangle \,|\, S_1, \ldots, S_{n-1}\right)\\ &= h(S_1, \ldots, S_{n-1}),\end{aligned}$$

ahol $h : \mathbb{R}^{2(n-1)} \to \mathbb{R}$ az a Borel-mérhető függvény, melyre $P_{(S_1,\ldots,S_{n-1})}$-m.m. $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$ esetén

$$h(y) = h(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \mathbb{E}\langle y_{n-1}, X_n\rangle.$$

(Itt $y_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n-1$.) Mivel minden $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$ esetén

$$\begin{aligned}h(y) &= \langle y_{n-1}, (0,1)\rangle\frac{1}{4} + \langle y_{n-1}, (0,-1)\rangle\frac{1}{4} + \langle y_{n-1}, (1,0)\rangle\frac{1}{4} + \langle y_{n-1}, (-1,0)\rangle\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4}\langle y_{n-1}, (0,0)\rangle = 0,\end{aligned}$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\langle S_{n-1}, X_n\rangle \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S\right) = 0.$$

Így, mivel X_n független az $\mathcal{F}_{n-1}^S$ σ-algebrától kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|S_n\|^2 \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S) &= \mathbb{E}(\langle S_n, S_n\rangle \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S) = \mathbb{E}(\langle S_{n-1} + X_n, S_{n-1} + X_n\rangle \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S)\\ &= \mathbb{E}(\|S_{n-1}\|^2 + 2\langle S_{n-1}, X_n\rangle + \|X_n\|^2 \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S)\\ &= \|S_{n-1}\|^2 + 2\cdot 0 + \mathbb{E}\|X_n\|^2 = \|S_{n-1}\|^2 + \mathbb{E}1 = \|S_{n-1}\|^2 + 1.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva megmutatjuk, hogy $\{\|S_n\|^2 - n, n \geqslant 0\}$ martingál. Az 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételeit kell leellenőrizni. Legyen minden $n \geqslant 0$ esetén $Y_n := \|S_n\|^2 - n$ és $\mathcal{F}_n^Y := \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$.

(i): Y_n $\mathcal{F}_n^Y$-mérhető $\mathcal{F}_n^Y$ definíciója miatt.

(ii): $\mathbb{E}|Y_n| \leqslant \mathbb{E}\|S_n\|^2 + n \leqslant 2n^2 + n < +\infty$.

A (iii) feltételhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^Y) = Y_{n-1} \quad \text{P-m.m.,} \qquad n \geqslant 1.$$

Mivel $\mathcal{F}_n^Y \subseteq \mathcal{F}_n^S$, a torony-szabály alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^Y) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(Y_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^Y\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\|S_n\|^2 - n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^S) \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^Y\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\|S_{n-1}\|^2 + 1 - n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^Y\Big) = \mathbb{E}\Big(Y_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^Y\Big) = Y_{n-1}.\end{aligned}$$

□

2.7.25. Feladat. (Móri [7], 27. Feladat) Tekintsünk egy egérkét, aki a számegyenes egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan bolyong oly módon, hogy a 0-ból indul és minden egész koordinátájú pontból ennek mind a két lehetséges egész koordinátájú szomszédjába 1/2 valószínűséggel ugorhat. Jelölje S_n az egérke helyzetét az n. lépés után ($S_0 = 0$). Mutassuk meg, hogy minden $t \in [0,1)$ esetén

$$\Big\{Y_n := t^{n-S_n}(1+\sqrt{1-t^2})^{S_n}, n \geqslant 0\Big\}$$

martingál.

Megoldás. Legyen $X_n := S_n - S_{n-1},\ n \geqslant 1$. Legyen továbbá minden $n \geqslant 0$ esetén

$$\mathcal{F}_n^Y := \sigma(Y_0, \dots, Y_n), \qquad \mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, \dots, S_n).$$

Nyilván Y_n $\mathcal{F}_n^Y$-mérhető ($\mathcal{F}_n^Y$ definíciója miatt) és

$$\mathbb{E}|Y_n| = \mathbb{E}\Big(|t|^{n-S_n}(1+\sqrt{1-t^2})^{S_n}\Big) \leqslant 1 \cdot 2^n < +\infty.$$

Az 2.7.15. Feladat alapján azt kell még ellenőrizni, hogy

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^Y) = Y_n \quad \text{P-m.m.,} \qquad n \geqslant 0.$$

Érdemes a $t = 0$ esetet a $t \neq 0$ esettől külön kezelni.

Ha $t \neq 0$, úgy

$$Y_n t^{-n} = \left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)^{S_n},$$

$$\log(Y_n t^{-n}) = S_n \log\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right).$$

Mivel $1+\sqrt{1-t^2} \neq t$, ha $t \in [0,1)$, (mert különben $\sqrt{1-t^2} = t-1 < 0$ lenne) kapjuk, hogy

$$S_n = \log(Y_n t^{-n})\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\right)\right)^{-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Ezért $\sigma(Y_n) = \sigma(S_n)$, így $\mathcal{F}_n^Y = \mathcal{F}_n^S$, $n \geqslant 0$. Emiatt S_n $\mathcal{F}_n^Y$-mérhető és $X_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ független $\mathcal{F}_n^Y$-tól minden $n \geqslant 0$ esetén. Így

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n^Y) &= \mathbb{E}\Big(t^{n+1-S_{n+1}}(1+\sqrt{1-t^2})^{S_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n^Y\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(t^{n+1-S_n-X_{n+1}}(1+\sqrt{1-t^2})^{S_n+X_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n^Y\Big) \\
&= t^{n+1-S_n}(1+\sqrt{1-t^2})^{S_n}\mathbb{E}\Big(t^{-X_{n+1}}(1+\sqrt{1-t^2})^{X_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n^Y\Big) \\
&= t^{n+1-S_n}(1+\sqrt{1-t^2})^{S_n}\mathbb{E}\Big(t^{-X_{n+1}}(1+\sqrt{1-t^2})^{X_{n+1}}\Big).
\end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(t^{-X_{n+1}}(1+\sqrt{1-t^2})^{X_{n+1}}\Big) &= \frac{1}{2}\Big(t^{-1}(1+\sqrt{1-t^2}) + t(1+\sqrt{1-t^2})^{-1}\Big)\\ &= \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t(1+\sqrt{1-t^2})} = \frac{1}{t}.\end{aligned}$$

Ezért

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = t^{n-S_n}(1+\sqrt{1-t^2})^{S_n} = Y_n.$$

Ha $t=0$, akkor ha $S_n \neq n$, úgy $Y_n = 0$. Ha pedig $S_n = n$, akkor $Y_n = 0^0 2^n = 2^n$. Ezért $Y_n = 2^n \mathbb{I}_{\{S_n=n\}}$. Így

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = \mathbb{E}(2^{n+1}\mathbb{I}_{\{S_{n+1}=n+1\}}\,|\,\mathcal{F}_n^Y).$$

Ha $S_{n+1} = n+1$, úgy $S_n = n$ (hiszen $S_n \leqslant n$), ezért a torony-szabály alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^Y) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(2^{n+1}\mathbb{I}_{\{S_{n+1}=n+1,S_n=n\}}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big)\\ &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(2^{n+1}\mathbb{I}_{\{S_n=n\}}\mathbb{I}_{\{S_{n+1}-S_n=1\}}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big)\\ &= \mathbb{E}\big(2^{n+1}\mathbb{I}_{\{S_n=n\}}\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{S_{n+1}-S_n=1\}}\,|\,\mathcal{F}_n^S)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big)\\ &= \mathbb{E}\big(2^{n+1}\mathbb{I}_{\{S_n=n\}}\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{S_{n+1}-S_n=1\}})\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big) = \mathbb{E}\big(2^{n+1}\mathbb{I}_{\{S_n=n\}}P(X_{n+1}=1)\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big)\\ &= \mathbb{E}\big(2^{n}\mathbb{I}_{\{S_n=n\}}\,|\,\mathcal{F}_n^Y\big) = \mathbb{E}(Y_n\,|\,\mathcal{F}_n^Y) = Y_n.\end{aligned}$$

□

2.7.26. Feladat. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy

$$P(X_1=-2) = \frac{1}{3}, \quad P(X_1=2) = \frac{1}{2}, \quad P(X_1=4) = \frac{1}{6}.$$

Legyen $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \geqslant 0$ és $S_0 = 0$.

(i) $\mathbb{E}S_n = ?$, $D^2 S_n = ?$,

(ii) A nagy számok erős törvénye alapján mit mondhatunk az $\{S_n, n \geqslant 0\}$ sorozatról?

(iii) Keressük meg az összes olyan $\theta \in \mathbb{R}$ értéket, melyre $\{e^{\theta S_n}, n \geqslant 0\}$ martingál az $\mathcal{F}_n := \sigma(S_i, 0 \leqslant i \leqslant n)$, $n \geqslant 0$ filtrációra nézve!

Megoldás.

(i) Az azonos eloszlásúság és a függetlenség miatt

$$\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_1 = n\left((-2)\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{6}\right) = n,$$

$$D^2 S_n = nD^2 X_1 = n(\mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2) = n\left(4\frac{1}{3} + 4\frac{1}{2} + 16\frac{1}{6} - 1\right) = 5n.$$

(ii) Mivel
$$\mathbb{E}|X_1| = 2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{6} = \frac{7}{3} < +\infty,$$
a nagy számok erős törvénye alapján
$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \;\Big|\; \frac{S_n(\omega)}{n} \to \mathbb{E}X_1\right\}\right) = 1.$$
Mivel $\mathbb{E}X_1 = 1 > 0$, egy valószínűségszámításból tanult eredmény alapján $P(S_n \to +\infty) = 1$.

(iii) Annak kell teljesülnie, hogy
$$\mathbb{E}(e^{\theta S_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = e^{\theta S_n}, \qquad n \geqslant 0.$$
Mivel
$$\mathbb{E}(e^{\theta S_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(e^{\theta S_n} e^{\theta X_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n) = e^{\theta S_n}\mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n) = e^{\theta S_n}\mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}}) = e^{\theta S_n}\mathbb{E}(e^{\theta X_1}),$$
kapjuk, hogy $\{e^{\theta S_n}, n \geqslant 0\}$ martingálságához (az $\{\mathcal{F}_n, n \geqslant 0\}$ filtrációra nézve) szükséges és elegendő feltétel, hogy
$$\mathbb{E}(e^{\theta X_1}) = 1 \qquad \text{legyen.}$$
Ekkor
$$\mathbb{E}(e^{\theta X_1}) = e^{-2\theta}\frac{1}{3} + e^{2\theta}\frac{1}{2} + e^{4\theta}\frac{1}{6} = 1 \qquad \text{kell legyen.}$$
Beszorozva $6e^{2\theta}$-val,
$$2 + 3e^{4\theta} + e^{6\theta} = 6e^{2\theta}.$$
Legyen $x := e^{2\theta}$, így
$$x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0.$$
Mivel $\theta = 0$ esetén $\{e^{\theta S_n} = 1, n \geqslant 0\}$ triviálisan martingál, $x = e^0 = 1$ megoldása a fenti 3-adfokú egyenletnek (tényleg az!). Osztva $(x-1)$-el az $x^3 + 3x^2 - 6x + 2$ polinomot kapjuk, hogy
$$x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = (x-1)(x^2 + 4x - 2).$$
Az $x^2 + 4x - 2 = 0$ egyenlet megoldásai
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 2}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}.$$
Mivel $x = e^{2\theta} > 0$, így csak az $x = -2 + \sqrt{6}$ gyök jó számunkra. Ezért $e^{2\theta} = \sqrt{6} - 2$, amiből
$$\theta = \frac{1}{2}\log(\sqrt{6} - 2) \approx -0.3998.$$
Összefoglalva: $\theta = 0$ és $\theta = \frac{1}{2}\log(\sqrt{6} - 2)$ esetén kapunk martingált. □

2.7.27. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 12.9.6.) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$, független valószínűségi változók:

$$X_n = \begin{cases} 1 & (2n)^{-1} \text{ valószínűséggel,} \\ 0 & 1 - n^{-1} \text{ valószínűséggel,} \\ -1 & (2n)^{-1} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

Legyen $Y_1 := X_1$, és $n \geqslant 2$ esetén,

$$Y_n := \begin{cases} X_n & \text{ha } Y_{n-1} = 0, \\ nY_{n-1}|X_n| & \text{ha } Y_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál! Mutassuk meg, hogy Y_n sztochasztikusan konvergál 0-hoz, ha $n \to \infty$.

Megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ és $\mathcal{F}_n^Y := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. A definíció alapján $Y_1 = X_1$ és

$$Y_n = nY_{n-1}|X_n|\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}\neq 0\}} + X_n\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}}, \qquad n \geqslant 2. \tag{2.7.47}$$

A 2.7.15. Feladat (i), (ii) és (iii) feltételeit kell ellenőrizni ahhoz, hogy $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál legyen.

(i): a generált σ-algebra definíciója alapján Y_n $\mathcal{F}_n^Y$-mérhető.

(ii): ha $n = 1$, akkor

$$\mathbb{E}(|Y_n|) = \mathbb{E}(|X_1|) = |1|\frac{1}{2n} + |0|\left(1 - \frac{1}{n}\right) + |-1|\frac{1}{2n} = \frac{1}{n} = 1.$$

Ha $n \geqslant 2$, akkor felhasználva, hogy $|X_n| \leqslant 1, n \in \mathbb{N}$, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant \mathbb{E}(n|Y_{n-1}||X_n|) + \mathbb{E}(|X_n|) \leqslant n\mathbb{E}(|Y_{n-1}|) + 1,$$

ami alapján, teljes indukcióval belátható, hogy $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty, n \in \mathbb{N}$.

(iii): A (iii) feltételhez azt kell megmutatni, hogy

$$\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y) = Y_{n-1} \quad \text{P-m.m.,} \qquad n \geqslant 2.$$

Tetszőleges $n \geqslant 1$ esetén, (2.7.47) alapján, felhasználva, hogy $\mathcal{F}_{n-1}^Y \subseteq \mathcal{F}_{n-1}^X, n \geqslant 2$, és X_n független $\mathcal{F}_{n-1}^X$-től, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y) &= \mathbb{E}(nY_{n-1}|X_n|\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}\neq 0\}} + X_n\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y) \\ &= nY_{n-1}\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}\neq 0\}}\mathbb{E}(|X_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y) + \mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}}\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}^Y) \\ &= nY_{n-1}\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}\neq 0\}}\mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}}\mathbb{E}(X_n) \\ &= nY_{n-1}\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}\neq 0\}}\left(1 \cdot \frac{1}{2n} + 1 \cdot \frac{1}{2n}\right) + \mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}} \cdot 0 \\ &= Y_{n-1}\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}\neq 0\}} + Y_{n-1}\mathbb{1}_{\{Y_{n-1}=0\}} = Y_{n-1}, \quad \text{P-m.m.,} \qquad n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Ezért $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geqslant \varepsilon) &= \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon, Y_{n-1} = 0, X_n = 0)\\ &\quad + \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon, Y_{n-1} = 0, X_n \neq 0)\\ &\quad + \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon, Y_{n-1} \neq 0, X_n = 0)\\ &\quad + \mathbb{P}(|Y_n| \geqslant \varepsilon, Y_{n-1} \neq 0, X_n \neq 0)\\ &= 0 + \mathbb{P}(1 \geqslant \varepsilon, Y_{n-1} = 0, X_n \neq 0) + 0 + \mathbb{P}(n|Y_{n-1}| \geqslant \varepsilon, Y_{n-1} \neq 0, X_n \neq 0)\\ &\leqslant \mathbb{P}(Y_{n-1} = 0, X_n \neq 0) + \mathbb{P}(Y_{n-1} \neq 0, X_n \neq 0)\\ &= \mathbb{P}(X_n \neq 0) = 2\frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty,\end{aligned}$$

így a sztochasztikus konvergencia definíciója miatt Y_n sztochasztikusan konvergál 0-hoz, ha $n \to \infty$. □

2.7.28. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 12.3.4.) Legyenek $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független valószínűségi változók, hogy

$$Z_n = \begin{cases} a_n & \frac{n^{-2}}{2} \text{ valószínűséggel,}\\ 0 & 1 - n^{-2} \text{ valószínűséggel,}\\ -a_n & \frac{n^{-2}}{2} \text{ valószínűséggel,}\end{cases}$$

ahol $a_1 := 2$ és $a_n := 4\sum_{j=1}^{n-1} a_j$, $n \geqslant 2$. Mutassuk meg, hogy $Y_n := \sum_{j=1}^{n} Z_j$, $n \geqslant 1$, martingál! Mutassuk meg, hogy az $Y := \lim_{n\to\infty} Y_n$ határérték 1 valószínűséggel létezik, noha nem létezik olyan $M \in \mathbb{R}$, melyre $\mathbb{E}(|Y_n|) \leqslant M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Megoldás. Mivel $Z_n, n \in \mathbb{N}$, függetlenek és 0 várható értékűek, $(Y_n, \mathcal{F}_n^Y)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál, ahol $\mathcal{F}_n^Y := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Valóban,

$$\mathbb{E}(Z_n) = a_n\frac{n^{-2}}{2} + 0(1 - n^{-2}) - a_n\frac{n^{-2}}{2} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{n^{-2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

a Borel-Cantelli lemma alapján $P(\limsup_{n\to\infty}\{Z_n \neq 0\}) = 0$, azaz $P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{Z_m \neq 0\}) = 0$. Így $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{Z_m = 0\}) = 1$, és ezért (a határérték definíciója alapján) $P(\exists \lim_{n\to\infty} Y_n \in \mathbb{R}) = 1$. Mivel $a_1 = 2$ és így $a_2 = 8$, továbbá $a_{n+1} = 4(a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) = 4(a_1 + \dots + a_{n-1}) + 4a_n = a_n + 4a_n = 5a_n$, $n \geqslant 2$, kapjuk, hogy $a_n = 8 \cdot 5^{n-2}$, $n \geqslant 2$. Megmutatjuk, hogy

$$\{|Y_n| \geqslant \frac{a_n}{2}\} = \{|Z_n| = a_n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ha $n=1$, akkor mivel $Y_1 = Z_1$ és $|Z_1| \in \{0,2\}$, kapjuk, hogy

$$\{|Y_1| \geqslant 1\} = \{|Z_1| \geqslant 1\} = \{Z_1 \neq 0\} = \{|Z_1| = 2\} = \{|Z_1| = a_1\}.$$

Ha $n=2$, akkor mivel $Y_1 \in \{-2,0,2\}$, ahhoz, hogy $|Y_2| \geqslant 4$ teljesüljön $Z_2 \neq 0$ szükséges, így

$$\{|Y_2| \geqslant 8/2\} = \{|Y_2| \geqslant 4\} = \{Z_2 \neq 0\} = \{|Z_2| = a_2\}.$$

Ha $n=3$, akkor, mivel Y_2 minimális értéke $-a_1 - a_2 = -2-8 = -10 = -2\cdot 5$, és Y_2 maximális értéke $a_1 + a_2 = 2+8 = 10 = 2\cdot 5$, kapjuk, hogy ahhoz, hogy $|Y_3| \geqslant 4\cdot 5$ teljesüljön, $Z_3 \neq 0$ szükséges, így

$$\{|Y_3| \geqslant 8\cdot 5/2\} = \{|Y_3| \geqslant 4\cdot 5\} = \{Z_3 \neq 0\} = \{|Z_3| = a_3\}.$$

Ha $n \geqslant 4$, akkor Y_{n-1} minimális értéke

$$-a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} = -2-8-8\cdot 5-\cdots-8\cdot 5^{n-3} = -2-8\frac{5^{n-2}-1}{5-1} = -2-2(5^{n-2}-1) = -2\cdot 5^{n-2},$$

és maximális értéke $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 2\cdot 5^{n-2}$, kapjuk, hogy $\{|Y_n| \geqslant a_n/2\} = \{|Y_n| \geqslant 4\cdot 5^{n-2}\} = \{Z_n \neq 0\}$. (Megjegyezzük, hogy a fenti levezetésből az is adódik, hogy $\{|Y_n| \geqslant 6\cdot 5^{n-2}\} = \{|Z_n| = a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.) Így

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|Y_n|) &= \mathbb{E}(|Y_n| \mathbb{1}_{\{|Y_n| \geqslant a_n/2\}} + |Y_n| \mathbb{1}_{\{|Y_n| < a_n/2\}}) \geqslant \mathbb{E}(|Y_n| \mathbb{1}_{\{|Y_n| \geqslant a_n/2\}}) \geqslant \frac{a_n}{2} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{|Y_n| \geqslant a_n/2\}}) \\
&= \frac{a_n}{2} P(\mathbb{1}_{\{|Y_n| \geqslant a_n/2\}}) = \frac{a_n}{2} P(\mathbb{1}_{\{|Z_n| = a_n\}}) = \frac{a_n}{2n^2} = \frac{8\cdot 5^{n-2}}{2n^2}, \qquad n \geqslant 3,
\end{aligned}$$

és ezért $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = \infty$. □

2.7.29. Feladat. (Prokaj Vilmos feladata) Legyenek $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}|X| < +\infty$, $\mathbb{E}|Y| < +\infty$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X \mid Y) = Y$ és $\mathbb{E}(Y \mid X) = X$. Mutassuk meg, hogy $P(X = Y) = 1$!

1. Megoldás. Először abban a speciális esetben látjuk be az állítást, mikor $\mathbb{E}X^2 < +\infty$, $\mathbb{E}Y^2 < +\infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y^2 &= \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y \mid X) + \mathbb{E}(Y \mid X))^2 \\
&= \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y \mid X))^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)^2) + 2\mathbb{E}\Big[(Y - \mathbb{E}(Y \mid X))\mathbb{E}(Y \mid X)\Big].
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[(Y - \mathbb{E}(Y \mid X))\mathbb{E}(Y \mid X)\Big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big((Y - \mathbb{E}(Y \mid X))\mathbb{E}(Y \mid X) \Big| X\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(Y \mid X)\mathbb{E}\Big(Y - \mathbb{E}(Y \mid X) \Big| X\Big)\Big] \\
&\qquad = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(Y \mid X)(\mathbb{E}(Y \mid X) - \mathbb{E}(Y \mid X))\Big] = 0,
\end{aligned}$$

kapjuk, hogy
$$\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y \mid X))^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)^2).$$
Felhasználva, hogy $\mathbb{E}(Y \mid X) = X$,
$$\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}(Y - X)^2 + \mathbb{E}X^2,$$
azaz $\mathbb{E}Y^2 - \mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}(Y - X)^2$. Így $\mathbb{E}Y^2 \geqslant \mathbb{E}X^2$. Fordított szereposztással $\mathbb{E}X^2 \geqslant \mathbb{E}Y^2$, így $\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}X^2$. Ezért $\mathbb{E}(Y - X)^2 = 0$, emiatt pedig
$$P((Y - X)^2 = 0) = 1,$$
és így $P(Y = X) = 1$. Azt a dolgot használjuk itt, hogy ha $\xi \geqslant 0$ és $\mathbb{E}\xi = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$. (Ez az eset, tehát mikor a 2. momentumok végességét is feltételezzük, heurisztikusan a feltételes várható érték vetítéses definíciójának következménye.)

Ha X és Y nem négyzetesen integrálható, akkor más formában kell azt mérni, hogy Y mennyire lóg ki a $\sigma(X)$-mérhető, integrálható valószínűségi változók teréből.

Most tehát csak azt tételezzük fel, hogy $\mathbb{E}|X| < +\infty$ és $\mathbb{E}|Y| < +\infty$. A feltételes várható értékre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenség alkalmazható és alkalmazva kapjuk, hogy

$$|Y| = |\mathbb{E}(X \mid Y)| \leqslant \mathbb{E}(|X| \mid Y), \tag{2.7.48}$$
$$|X| = |\mathbb{E}(Y \mid X)| \leqslant \mathbb{E}(|Y| \mid X). \tag{2.7.49}$$

Véve mindkét egyenlőtlenség mindkét oldalának várható értékét
$$\mathbb{E}|Y| \leqslant \mathbb{E}[\mathbb{E}(|X| \mid Y)] = \mathbb{E}|X|,$$
$$\mathbb{E}|X| \leqslant \mathbb{E}[\mathbb{E}(|Y| \mid X)] = \mathbb{E}|Y|,$$
ezért $\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}|Y|$. Tekintsük az $\mathbb{E}(|X| \mid Y) - |Y|$ valószínűségi változót, ez (2.7.48) alapján nemnegatív és várható értéke
$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}(|X| \mid Y) - |Y|\big] = \mathbb{E}|X| - \mathbb{E}|Y| = 0.$$
Ezért
$$P\Big(\mathbb{E}(|X| \mid Y) = |Y|\Big) = 1.$$
Felcserélve X és Y szerepét
$$P\Big(\mathbb{E}(|Y| \mid X) = |X|\Big) = 1.$$
Vezessük be az $a \vee 0 := \max\{a, 0\}$ jelölést. Mivel
$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$
kapjuk, hogy
$$a \vee 0 = \frac{1}{2}(a + |a|).$$

Így

$$\mathbb{E}(X \vee 0 \,|\, Y) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X + |X| \,|\, Y) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) + \mathbb{E}(|X| \,|\, Y)\Big) = \frac{1}{2}(Y + |Y|) = Y \vee 0.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(Y \vee 0 \,|\, X) = X \vee 0.$$

Megmutatjuk, hogy ha $\mathbb{E}(X \,|\, Y) = Y$ és $\mathbb{E}(Y \,|\, X) = X$, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén a $t - X$, $t - Y$ párnak is megvan ez a tulajdonsága. Mivel $\sigma(t - X) = \sigma(X)$ és $\sigma(t - Y) = \sigma(Y)$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t - X \,|\, t - Y) &:= \mathbb{E}(t - X \,|\, \sigma(t - Y)) = \mathbb{E}(t - X \,|\, \sigma(Y)) =: \mathbb{E}(t - X \,|\, Y)\\ &= \mathbb{E}(t \,|\, Y) - \mathbb{E}(X \,|\, Y) = t - Y.\end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(t - Y \,|\, t - X) = t - X.$$

Ezért a korábbi gondolatmenetet alkalmazva X és Y helyett $t-X$ és $t-Y$-ra, tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((t - Y) \vee 0 \,|\, t - X) &= (t - X) \vee 0,\\ \mathbb{E}((t - X) \vee 0 \,|\, t - Y) &= (t - Y) \vee 0,\end{aligned}$$

ami úgy is írható, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((t - Y) \vee 0 \,|\, X) &= (t - X) \vee 0,\\ \mathbb{E}((t - X) \vee 0 \,|\, Y) &= (t - Y) \vee 0.\end{aligned}$$

Ezért speciálisan minden $q \in \mathbb{Q}$-ra

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\big((X - q) \vee 0\big)\big((q - Y) \vee 0\big)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(\big((X - q) \vee 0\big)\big((q - Y) \vee 0\big) \,|\, X\Big)\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\big((X - q) \vee 0\big)\mathbb{E}\Big((q - Y) \vee 0 \,|\, X\Big)\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\big((X - q) \vee 0\big)\big((q - X) \vee 0\big)\Big] = \mathbb{E}\,0 = 0,\end{aligned}$$

mert ha $X(\omega) \geqslant q$, akkor az integrandus $(X(\omega) - q)0 = 0$. Ha pedig $X(\omega) < q$, akkor az integrandus $0(q - X(\omega)) = 0$. Mivel $\big((X - q) \vee 0\big)\big((q - Y) \vee 0\big) \geqslant 0$ és várható értéke nulla kapjuk, hogy

$$P\Big(\big((X - q) \vee 0\big)\big((q - Y) \vee 0\big) = 0\Big) = 1.$$

Így minden $q \in \mathbb{Q}$ esetén létezik egy olyan nulla valószínűségű esemény, hogy azon kívül $\big((X - q) \vee 0\big)\big((q - Y) \vee 0\big) = 0$. Mivel megszámlálható sok nulla valószínűségű esemény uniója is nulla valószínűségű esemény, kapjuk, hogy létezik egy olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény, hogy $P(A) = 0$ és

$$\big((X(\omega) - q) \vee 0\big)\big((q - Y(\omega)) \vee 0\big) = 0, \quad \omega \in \Omega \setminus A, \quad \forall\, q \in \mathbb{Q}.$$

Megmutatjuk, hogy ha $\omega \in \Omega \setminus A$, akkor $Y(\omega) \geqslant X(\omega)$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz $Y(\omega) < X(\omega)$. Ekkor létezik olyan $q \in \mathbb{Q}$ (ez persze függ ω-tól), hogy $Y(\omega) < q < X(\omega)$. Azonban ekkor

$$\big((X(\omega) - q) \vee 0\big)\big((q - Y(\omega)) \vee 0\big) = (X(\omega) - q)(q - Y(\omega)) > 0,$$

ami nem lehetséges, tehát $Y(\omega) \geqslant X(\omega)$. Mivel $P(\Omega \setminus A) = 1$, így $P(Y \geqslant X) = 1$. Szerepcserével $P(X \geqslant Y) = 1$ is adódik, így

$$P(X = Y) = 1.$$

2. Megoldás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Mivel $|f| \leqslant \pi/2$, $\mathbb{E}|f(X)| \leqslant \pi/2$ és $\mathbb{E}|f(Y)| \leqslant \pi/2$. Így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X)(X - Y)) &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big(f(X)(X - Y) \,|\, X\big)\Big] = \mathbb{E}\Big[f(X)\mathbb{E}(X - Y \,|\, X)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[f(X)\big(X - \mathbb{E}(Y \,|\, X)\big)\Big] = \mathbb{E}\big[f(X)(X - X)\big] = 0.\end{aligned}$$

Hasonlóan, $\mathbb{E}(f(Y)(Y - X)) = 0$. Így $\mathbb{E}\big[(f(X) - f(Y))(X - Y)\big] = 0$. Mivel f szigorúan monoton növekvő,

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geqslant 0, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ezért $P\big((f(X) - f(Y))(X - Y) \geqslant 0\big) = 1$, és emiatt, felhasználva, hogy $\mathbb{E}\big[(f(X) - f(Y))(X - Y)\big] = 0$, kapjuk, hogy

$$P\big((f(X) - f(Y))(X - Y) = 0\big) = 1.$$

Mivel fennáll az is, hogy $(f(x) - f(y))(x - y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$, kapjuk, hogy $P(X = Y) = 1$. □

2.7.30. Feladat. (Teljes szórásnégyzet tétele) Legyenek X és Y valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(\operatorname{Var}(X \,|\, Y)) + \operatorname{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)).$$

Megoldás. Felhasználva $\operatorname{Var}(X \,|\, Y)$ definícióját és azt, hogy $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \,|\, \eta))$, $(\mathbb{E}|\xi| < +\infty)$ kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\operatorname{Var}(X \,|\, Y)) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X \,|\, Y))^2 = \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X \,|\, Y)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2).$$

Mivel $D^2\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$, adódik, hogy

$$\operatorname{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2) - \big(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y))\big)^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2) - (\mathbb{E}X)^2.$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\operatorname{Var}(X \,|\, Y)) + \operatorname{Var}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)) &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \,|\, Y)^2) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X \,|\, Y)) \\ &= D^2X + 2\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \,|\, Y)\big(\mathbb{E}(X \,|\, Y) - X\big)\Big).\end{aligned}$$

Azt kell csak megmutatnunk, hogy

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)(\mathbb{E}(X\,|\,Y)-X)\Big)=0.$$

Felhasználva újra, hogy $\mathbb{E}\xi=\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta))$, $(\mathbb{E}|\xi|<+\infty)$ és, hogy $\mathbb{E}(f(\eta)\xi\,|\,\eta)=f(\eta)\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta)$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)-X\Big)\Big)&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)-X\Big)\Big|\,Y\Big)\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X\,|\,Y)\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)-X\Big|\,Y\Big)\Big]=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X\,|\,Y)\Big(\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)\,|\,Y\Big)-\mathbb{E}(X\,|\,Y)\Big)\Big]\\&=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}(X\,|\,Y)\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)-\mathbb{E}(X\,|\,Y)\Big)\Big]=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\,|\,Y)\cdot 0)=0.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy másként is bizonyíthattunk volna. Tekintsük az $X=(X-\mathbb{E}(X\,|\,Y))+\mathbb{E}(X\,|\,Y)$ felbontást. Az előzőekben megmutattuk, hogy

$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)\Big(\mathbb{E}(X\,|\,Y)-X\Big)\Big)=0,$$

így

$$\mathrm{Var}X=\mathrm{Var}(X-\mathbb{E}(X\,|\,Y))+\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X\,|\,Y)).$$

Mivel $\mathrm{Var}(X-\mathbb{E}(X\,|\,Y))=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X\,|\,Y))^2$ és $\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X\,|\,Y))=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X\,|\,Y))^2$ kapjuk a bizonyítandó állítást. □

2.7.31. Feladat. Adjunk példát olyan ξ és η valószínűségi változókra, hogy $\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta)$ konstans 1-valószínűséggel, de ξ és η nem függetlenek.

Megoldás. Megjegyezzük, hogy ha $\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta)$ konstans 1-valószínűséggel, akkor ez a konstans $\mathbb{E}\xi$, hiszen ha $\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta)=c$ P-m.m. valamilyen $c\in\mathbb{R}$ konstanssal, akkor mindkét oldal várható értékét véve $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta))=\mathbb{E}\xi=c$.

Legyenek ξ és $\eta:\Omega\to\{-1,0,1\}$ diszkrét valószínűségi változók, együttes eloszlásukat az alábbi kontingencia táblázat tartalmazza:

$\xi \ \backslash \ \eta$	-1	0	1	
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,5
1	0	0,25	0	0,25
	0,25	0,5	0,25	1

Ekkor $\mathbb{E}\xi=(-1)0,25+0\cdot 0,5+1\cdot 0,25=0$, továbbá

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta=-1)&=(-1)P(\xi=-1\,|\,\eta=-1)+0\cdot P(\xi=0\,|\,\eta=-1)+1\cdot P(\xi=1\,|\,\eta=-1)\\&=(-1)0+0\cdot\frac{0,25}{0,25}+1\cdot 0=0,\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta=0)=(-1)P(\xi=-1\,|\,\eta=0)+1\cdot P(\xi=1\,|\,\eta=0)=(-1)\frac{0,25}{0,5}+1\cdot\frac{0,25}{0,5}=0,$$

$$\mathbb{E}(\xi\,|\,\eta=1)=(-1)P(\xi=-1\,|\,\eta=1)+1\cdot P(\xi=1\,|\,\eta=1)=0.$$

Így $\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = 0$ P-m.m., azaz $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ konstans 0 P-m.m. Azonban ξ és η nem függetlenek, ugyanis például

$$0 = P(\xi = 0, \eta = 0) \neq P(\xi = 0)P(\eta = 0) = 0,5 \cdot 0,5.$$

Heurisztikusan azért nem igaz a dolog, mert csak azt tudjuk, hogy akármi is a feltétel, ξ várható értéke az adott feltételre nézve mindig ugyanaz, és nem azt tudjuk, hogy ugyanaz az eloszlása. □

2.7.32. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású, pozitív valószínűségi változók F (közös) eloszlásfüggvénnyel, hogy $\mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}X_1 < +\infty$. (Ekkor X_n, $n \in \mathbb{N}$-re gondolhatunk úgy, mint egy termékre vonatkozóan az egymást követő árajánlatok.) Legyen $A > 0$ rögzített és

$$N := \min\{k \geqslant 1 \mid X_k \geqslant A\}.$$

Legyen $\alpha := P(X_1 \geqslant A)$ és tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$.

(i) Mutassuk meg, hogy $P(N < +\infty) = 1$.

(ii) Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}X_N = \alpha^{-1} \int_A^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x) = \mathbb{E}(X_1 \mid X_1 \geqslant A).$$

(Interpretáció: az veheti meg a terméket, akinek árajánlata először nagyobb vagy egyenlő, mint A, és X_N a „nyertes” árajánlat.)

(iii) Feltételezve, hogy a közös eloszlás $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlás, mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X_N = A + 1/\lambda$. (Azaz ekkor $\mathbb{E}X_N = A + \mathbb{E}X_1$.)

(iv) Mutassuk meg, hogy X_N és N függetlenek!

Megoldás.

(i): 1. Indoklás: Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{N = \infty\} \subseteq \{X_1 < A, \dots, X_n < A\},$$

és X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlásúak kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$P(N = +\infty) \leqslant P(X_1 < A, \dots, X_n < A) = \big(P(X_1 < A)\big)^n = (1 - \alpha)^n.$$

Mivel $\alpha \neq 0$, kapjuk, hogy $0 \leqslant 1 - \alpha < 1$, s így $(1 - \alpha)^n \to 0$, ha $n \to +\infty$. Ezért $P(N = +\infty) = 0$, azaz $P(N < \infty) = 1$.

2. Indoklás: Mivel

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n \geqslant A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha = +\infty,$$

és mivel $\{X_n \geqslant A\}$, $n \in \mathbb{N}$ független események, a Borel–Cantelli-lemma alapján

$$P\big(\limsup_{n\to+\infty}\{X_n \geqslant A\}\big) = 1.$$

Így, mivel minden $\omega \in \limsup_{n\to+\infty}\{X_n \geqslant A\}$ esetén, $X_n(\omega) \geqslant A$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re, kapjuk, hogy $P(N < +\infty) = 1$.

(ii): Mivel $P(N < +\infty) = 1$, kapjuk, hogy

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=n\}} = 1\right) = 1.$$

Ezért, felhasználva, hogy X_n, $n \in \mathbb{N}$, nemnegatívak (pozitívak is), fennáll, hogy

$$\mathbb{E}X_N = \mathbb{E}\left(X_N \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_N \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_N \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right).$$

Továbbá, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{N=n\}}) &= \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{N=n\}}) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_1<A\}} \cdots \mathbb{1}_{\{X_{n-1}<A\}} \mathbb{1}_{\{X_n \geqslant A\}}) \\ &= \mathbb{E}\Big(X_n \mathbb{1}_{\{X_n \geqslant A\}}\Big)\Big)\mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{X_1<A\}}\Big) \cdots \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_{\{X_{n-1}<A\}}\Big) \\ &= (1-\alpha)^{n-1}\mathbb{E}\Big(X_1 \mathbb{1}_{\{X_1 \geqslant A\}}\Big) = (1-\alpha)^{n-1}\int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x).\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}X_N = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)^{n-1}\int_A^{+\infty} x\,\mathsf{d}F(x) = \int_A^{+\infty} x\,\mathsf{d}F(x)\frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha}\int_A^{+\infty} x\,\mathsf{d}F(x).$$

Felhasználva, hogy $\mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}X_1 < +\infty$, fennáll, hogy $\int_A^{+\infty} x\,\mathsf{d}F(x) < +\infty$, és így $\mathbb{E}|X_N| = \mathbb{E}X_N < +\infty$.

Az alábbiakban egy (kicsit) másik módszert is mutatunk $\mathbb{E}X_N$ meghatározására. A teljes várható érték tétele alapján (ennek alkalmazásához kell, hogy $\mathbb{E}|X_N| < +\infty$, amiről már beláttuk, hogy teljesül):

$$\mathbb{E}X_N = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X_N \mid N = x)\,\mathsf{d}F_N(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_N \mid N = n) P(N = n). \tag{2.7.50}$$

Mivel

$$\big\{N = n\big\} = \big\{X_1 < A, \ldots, X_{n-1} < A, X_n \geqslant A\big\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

felhasználva, hogy X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlásúak kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P(N = n) &= P(X_1 < A, \ldots, X_{n-1} < A, X_n \geqslant A) \\ &= P(X_1 < A) \cdots P(X_{n-1} < A) P(X_n \geqslant A) = (1-\alpha)^{n-1}\alpha.\end{aligned}$$

Most két különböző módon is meghatározzuk, hogy az $\mathbb{E}(X_N \,|\, N = n) = f(n)$ összefüggés milyen f függvénnyel teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}(X_N \,|\, N = n) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathsf{d}F_{X_N|N}(x|n),$$

ahol minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{X_N|N}(x|n) &:= \frac{P(X_N < x, N = n)}{P(N = n)} = \frac{P(X_n < x, N = n)}{P(N = n)} \\ &= \frac{P(X_1 < A, \dots, X_{n-1} < A, A \leqslant X_n < x)}{(1-\alpha)^{n-1}\alpha}. \end{aligned}$$

Ha $x < A$, akkor $F_{X_N|N}(x|n) = 0$. Ha $x \geqslant A$, akkor (felhasználva újra, hogy X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlásúak) kapjuk, hogy

$$F_{X_N|N}(x|n) = \frac{P(A \leqslant X_n < x)}{\alpha} = \frac{F(x) - F(A)}{\alpha}.$$

Ezért

$$\mathsf{d}F_{X_N|N}(x|n) = \frac{1}{\alpha}\mathsf{d}F(x), \qquad \text{ha } x \geqslant A,$$

és így

$$\mathbb{E}(X_N \,|\, N = n) = \int_{A}^{\infty} x \, \mathsf{d}F_{X_N|N}(x|n) = \frac{1}{\alpha}\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Most egy másik módszerrel is megmutatjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X_N \,|\, N) = \frac{1}{\alpha}\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x) \qquad \text{P-m.m.}$$

Azt kell ellenőrizni, hogy minden $B \in \sigma(N)$ esemény esetén

$$\mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\alpha}\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x) \mathbb{1}_B\Big). \tag{2.7.51}$$

Elég a $B = \{N = n\}$, $n \in \mathbb{N}$ alakú eseményeket vizsgálni, hiszen az ilyen alakú események generálják a $\sigma(N)$ σ-algebrát (ugyanis $P(N < +\infty) = 1$.) Az előzőekben már leellenőriztük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re fennáll, hogy

$$\mathbb{E}(X_N \mathbb{1}_{\{N=n\}}) = (1-\alpha)^{n-1}\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x).$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\alpha}\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x) \mathbb{1}_{\{N=n\}}\Big) &= \frac{1}{\alpha}\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x) P(N = n) = \frac{1}{\alpha}\left(\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x)\right)\alpha(1-\alpha)^{n-1} \\ &= (1-\alpha)^{n-1}\int_{A}^{+\infty} x \, \mathsf{d}F(x), \end{aligned}$$

és így teljesül (2.7.51).

Két út is van a befejezésre.

1. út: Véve az

$$\mathbb{E}(X_N \,|\, N) = \frac{1}{\alpha} \int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x) \qquad \text{P-m.m.}$$

egyenlet mindkét oldalának várható értékét, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}X_N = \frac{1}{\alpha} \int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x).$$

2. út: Felhasználva (2.7.50)-at kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}X_N = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x) \right) (1-\alpha)^{n-1}\alpha = \int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x) \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x).$$

Azt kell még ellenőrizni, hogy $\alpha^{-1} \int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x) = \mathbb{E}(X_1 \,|\, X_1 \geqslant A)$. Ekkor X_1 feltételes eloszlásfüggvénye az $\{X_1 \geqslant A\}$ eseményre vonatkozóan

$$F_{X_1 \,|\, \{X_1 \geqslant A\}}(x) := P(X_1 < x \,|\, X_1 \geqslant A) = 0, \quad \text{ha } \ x \leqslant A,$$

ha pedig $x > A$, akkor

$$F_{X_1 \,|\, \{X_1 \geqslant A\}}(x) = \frac{P(X_1 < x, X_1 \geqslant A)}{P(X_1 \geqslant A)} = \frac{P(A \leqslant X_1 < x)}{P(X_1 \geqslant A)} = \frac{F(x) - F(A)}{1 - F(A)}.$$

Így

$$\mathbb{E}(X_1 \,|\, X_1 \geqslant A) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathsf{d}F_{X_1 \,|\, \{X_1 \geqslant A\}}(x) = \int_A^{+\infty} x \frac{1}{1-F(A)} \,\mathsf{d}F(x) = \frac{1}{\alpha} \int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x).$$

(iii): Ekkor

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathsf{e}^{-\lambda x} & \text{ha } \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{ha } \quad x < 0, \end{cases}$$

és a közös sűrűségfüggvény

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathsf{e}^{-\lambda x} & \text{ha } \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{ha } \quad x < 0. \end{cases}$$

Parciális integrálást használva kapjuk, hogy

$$\int_A^{+\infty} x f(x) \,\mathsf{d}x = \lambda \int_A^{+\infty} x \mathsf{e}^{-\lambda x} \,\mathsf{d}x = \lambda \left[x \frac{\mathsf{e}^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_A^{+\infty} - \lambda \int_A^{+\infty} \frac{\mathsf{e}^{-\lambda x}}{-\lambda} \,\mathsf{d}x = A\mathsf{e}^{-\lambda A} + \frac{\mathsf{e}^{-\lambda A}}{\lambda}.$$

Így

$$\alpha^{-1} \int_A^{+\infty} x \,\mathsf{d}F(x) = \frac{\mathsf{e}^{-\lambda A}(A + \frac{1}{\lambda})}{P(X_1 \geqslant A)} = \frac{\mathsf{e}^{-\lambda A}(A + \frac{1}{\lambda})}{\mathsf{e}^{-\lambda A}} = A + \frac{1}{\lambda}.$$

(iv): Megjegyezzük, hogy az, hogy $\mathbb{E}(X_N \,|\, N)$ 1 valószínűséggel konstans még nem vonja maga után, hogy X_N és N függetlenek (lásd az előző feladatot).

Azt kell megmutatni, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P(X_N < x, N = n) = P(X_N < x)P(N = n).$$

Ha $x \leqslant A$, akkor mindkét oldal 0, ugyanis $P(X_N \geqslant A) = 1$.

Ha $x > A$, akkor

$$\begin{aligned} P(X_N < x, N = n) &= P(X_n < x, N = n) = P(A \leqslant X_n < x, X_1 < A, \ldots, X_{n-1} < A) \\ &= (1-\alpha)^{n-1}(F(x) - F(A)). \end{aligned}$$

Valamint,

$$\begin{aligned} P(N = n)P(X_N < x) &= (1-\alpha)^{n-1}\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_N < x, N = n) \\ &= \alpha(1-\alpha)^{n-1} \sum_{n=1}^{+\infty} P(A \leqslant X_n < x)P(X_1 < A) \cdots P(X_{n-1} < A) \\ &= \alpha(1-\alpha)^{n-1}(F(x) - F(A)) \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\alpha)^{n-1} \\ &= \alpha(1-\alpha)^{n-1}(F(x) - F(A)) \frac{1}{\alpha} \\ &= (1-\alpha)^{n-1}(F(x) - F(A)). \end{aligned}$$

Így X_N és N függetlenek. □

2.8. Többdimenziós normális eloszlás

2.8.1. Feladat. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és tekintsünk egy k-dimenziós normális eloszlású ξ valószínűségi változót, melynek várható érték vektora $m \in \mathbb{R}^k$ és kovariancia mátrixa D. Ismert, hogy ha D nemelfajult, azaz $\det(D) \neq 0$, akkor ξ abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det(D)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left\langle D^{-1}(x-m), (x-m)\right\rangle \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^k.$$

Legyen a továbbiakban $k = 2$, $m \in \mathbb{R}^2$ és D egy (2×2)-es invertálható kovarianciamátrix. Írjuk fel f_ξ-t ξ koordinátái várható értékeinek, szórásainak és korrelációs együtthatójának függvényeként mátrix műveletek nélküli alakban!

Megoldás. Legyen

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$D = \begin{pmatrix} \mathbb{D}^2\xi_1 & \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) \\ \operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) & \mathbb{D}^2\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

ahol $\sigma_1^2 = \mathbb{D}^2\xi_1$, $\sigma_2^2 = \mathbb{D}^2\xi_2$ és $\rho = \operatorname{corr}(\xi_1,\xi_2)$. Így

$$\det D = \sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2),$$

és

$$D^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

Ezért minden $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$D^{-1}(x-m) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2(x_1-m_1) - \rho\sigma_1\sigma_2(x_2-m_2) \\ -\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-m_1) + \sigma_1^2(x_2-m_2) \end{pmatrix},$$

és így

$$\begin{aligned}\big\langle D^{-1}(x-m),(x-m)\big\rangle = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\Big[&\sigma_2^2(x_1-m_1)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-m_1)(x_2-m_2)\\ &+ \sigma_1^2(x_2-m_2)^2\Big].\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}f_\xi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\bigg\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\bigg[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\\ + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\bigg]\bigg\}, \qquad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

(Mivel D invertálható, $\sigma_1 \ne 0$, $\sigma_2 \ne 0$ és $|\rho| \ne 1$.) □

2.8.2. Feladat. Legyen $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ egy 2-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó $m \in \mathbb{R}^2$ várható érték vektorral és D invertálható kovarianciamátrixxal. Határozzuk meg ξ_1-nek a $\xi_2 = x_2$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlását, ahol $x_2 \in \mathbb{R}$.

Megoldás. Tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén, az előző feladat alapján

$$\begin{aligned}f_{\xi_1\,|\,\xi_2}(x_1\,|\,x_2) &= \frac{f_{(\xi_1,\xi_2)}(x_1,x_2)}{f_{\xi_2}(x_2)}\\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\bigg\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\bigg[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\\ &\qquad + \left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2\bigg]\bigg\}\\ &\qquad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\bigg\{-\frac{(x_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\bigg\}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Itt kihasználtuk azt is, hogy egy többdimenziós normális eloszlás koordinátái is normális eloszlásúak a megfelelő paraméterekkel. Így

$$\begin{aligned} f_{\xi_1\,|\,\xi_2}(x_1\,|\,x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big[\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\Big)^2 - 2\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\frac{x_2-m_2}{\sigma_2} \\ &\qquad + \Big(\frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{2(1-\rho^2)}{2\sigma_2^2}\Big)(x_2-m_2)^2\Big]\Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1} - \rho\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\Big)^2\Big\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2(1-\rho^2)}}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\Big(x_1-m_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-m_2)\Big)^2\Big\}. \end{aligned}$$

Ezért ξ_1-nek a $\xi_2 = x_2$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlása

$$\mathcal{N}\Big(m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-m_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\Big),$$

azaz a szóbanforgó feltételes eloszlás is normális. □

2.8.3. Feladat. Adjunk példát olyan (ξ,η) 2-dimenziós valószínűségi vektorváltozóra, melynek koordinátái normális eloszlásúak, de (ξ,η) nem normális eloszlású.

Megoldás. (Major Péter példája) Definiáljuk a következő $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt: $\Omega := [0,1]$, $\mathcal{A}$ a $[0,1]$-beli Borel-halmazok σ-algebrája, P pedig a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en. A ξ és η valószínűségi változókat értelmezzük a következőképpen: $\xi(x) := \Phi^{-1}(x)$, $x\in[0,1]$, és

$$\eta(x) := \begin{cases} \Phi^{-1}(1-x) & \text{ha } \ 0\leqslant x < \frac{1}{2}, \\ \Phi^{-1}(x-1/2) & \text{ha } \ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét jelöli. Mivel Φ szigorúan monoton növekvő így értelmes Φ^{-1}-ről beszélni. Megmutatjuk, hogy ξ és η is standard normális eloszlású, de (ξ,η) nem normális eloszlású.

Legyen $x\in\mathbb{R}$ rögzített. Ekkor

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\{y\in[0,1] : \Phi^{-1}(y) < x\}) = P(\{y\in[0,1] : y < \Phi(x)\}) = \Phi(x),$$

így ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Továbbá

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P(\eta < x) = P(\{y\in[0,1] : \eta(y) < x\}) \\ &= P(\{y\in[0,1/2) : \eta(y) < x\}) + P(\{y\in[1/2,1] : \eta(y) < x\}) \\ &= P(\{y\in[0,1/2) : \Phi^{-1}(1-y) < x\}) + P(\{y\in[1/2,1] : \Phi^{-1}(y-1/2) < x\}) \\ &= P(\{y\in[0,1/2) : 1-y < \Phi(x)\}) + P(\{y\in[1/2,1] : y-1/2 < \Phi(x)\}) \\ &= P(\{y\in[0,1/2) : 1-\Phi(x) < y\}) + P(\{y\in[1/2,1] : y < \Phi(x)+1/2\}). \end{aligned}$$

Ha $x \geqslant 0$, úgy $\Phi(x) \geqslant 1/2$, és így

$$F_\eta(x) = \left(\frac{1}{2} - (1 - \Phi(x))\right) + \frac{1}{2} = \Phi(x).$$

Ha pedig $x < 0$, úgy $\Phi(x) < 1/2$, és így

$$F_\eta(x) = 0 + \left(\Phi(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \Phi(x).$$

Összefoglalva, $F_\eta(x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, azaz η is standard normális eloszlású.

Megmutatjuk, hogy $P(\xi + \eta = 0) = 1/2$, amiből már következik, hogy (ξ, η) nem normális eloszlású. Ugyanis, ha (ξ, η) normális eloszlású lenne, akkor $\xi + \eta$ is, és így $P(\xi + \eta = 0) = 0$ lenne. Jelen esetben

$$\begin{aligned}
P(\xi + \eta = 0) &= P\big(y \in [0, 1/2) : \xi(y) + \eta(y) = 0\big) + P\big(y \in [1/2, 1] : \xi(y) + \eta(y) = 0\big) \\
&= P\big(y \in [0, 1/2) : \xi(y) + \xi(1 - y) = 0\big) + P\big(y \in [1/2, 1] : \xi(y) + \xi(y - 1/2) = 0\big) \\
&= P\big(y \in [0, 1/2) : \Phi^{-1}(y) + \Phi^{-1}(1 - y) = 0\big) \\
&\quad + P\big(y \in [1/2, 1] : \Phi^{-1}(y) + \Phi^{-1}(y - 1/2) = 0\big).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\Phi^{-1}(y) = -\Phi^{-1}(1 - y) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \Phi(-\Phi^{-1}(1 - y)) = 1 - \Phi(\Phi^{-1}(1 - y)) = 1 - (1 - y) = y,$$

és azt, hogy

$$\Phi^{-1}(y) = -\Phi^{-1}(y - 1/2) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1 - (y - 1/2) = 3/2 - y,$$

kapjuk, hogy

$$P(\xi + \eta = 0) = P(y \in [0, 1/2) : y = y) + P(y \in [1/2, 1] : 2y = 3/2) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

$\square$

2.8.4. Feladat. (Sveshnikov [14], Example 19.1) Legyen (X_1, X_2, X_3, X_4) 4-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható érték vektora $m := (10, 0, -10, 1)^\top$ és kovariancia mátrixa

$$D := \begin{pmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizzük le, hogy (X_1, X_2, X_3, X_4) abszolút folytonos eloszlású és határozzuk meg a sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}
\det D &= 15\begin{vmatrix} 16 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 16 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 15(16\cdot 11 - 6\cdot 20 - 2\cdot 14) - 3(3\cdot 11 - 6\cdot 3 - 2\cdot 1) + (3\cdot 20 - 16\cdot 3 - 2(-2)) \\
&= 15\cdot 28 - 3\cdot 13 + 16 = 397 \neq 0,
\end{aligned}$$

kapjuk, hogy (X_1, X_2, X_3, X_4) abszolút folytonos. Meghatározzuk most D inverzét:

$$(D^{-1})_{1,1} = \frac{1}{397}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 16 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{28}{397},$$

$$(D^{-1})_{1,2} = \frac{1}{397}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{397}(3\cdot 11 - 1\cdot 20) = -\frac{13}{397},$$

$$(D^{-1})_{1,3} = \frac{1}{397}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 16 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{397}(3\cdot 20 - 44) = \frac{16}{397},$$

$$(D^{-1})_{1,4} = \frac{1}{397}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 16 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{397}(3\cdot 14 - 1\cdot 28) = -\frac{14}{397},$$

$$(D^{-1})_{2,2} = \frac{1}{397}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{397}(15\cdot 11 - 1\cdot 3) = \frac{162}{397},$$

$$(D^{-1})_{2,3} = \frac{1}{397}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{397}(15\cdot 20 - 1\cdot 9) = -\frac{291}{397},$$

$$(D^{-1})_{2,4} = \frac{1}{397}(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{397}(15\cdot 14 - 1\cdot 5) = \frac{205}{397},$$

és

$$(D^{-1})_{3,3} = \frac{1}{397}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{397}(15\cdot 44 - 3\cdot 9) = \frac{633}{397},$$

$$(D^{-1})_{3,4} = \frac{1}{397}(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{397}(15\cdot 28 - 3\cdot 5) = -\frac{405}{397},$$

$$(D^{-1})_{4,4} = \frac{1}{397}(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{397}(15\cdot 28 - 3\cdot 6 + 2) = \frac{404}{397}.$$

Felhasználva, hogy D szimmetrikussága miatt D^{-1} is szimmetrikus, kapjuk, hogy

$$D^{-1} = \frac{1}{397}\begin{pmatrix} 28 & -13 & 16 & 14 \\ -13 & 162 & -291 & 205 \\ 16 & -291 & 633 & -405 \\ 14 & 205 & -405 & 404 \end{pmatrix}.$$

Így

$$\begin{aligned} &f_{X_1,X_2,X_3,X_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{4}{2}}\sqrt{397}}\exp\bigg\{-\frac{1}{2\cdot 397}\Big(28(x_1-10)^2 - 2\cdot 13(x_1-10)x_2 + 2\cdot 16(x_1-10)(x_3+10) \\ &\qquad + 2\cdot 14(x_1-10)(x_4-1) + 162x_2^2 - 2\cdot 291x_2(x_3+10) + 2\cdot 205x_2(x_4-1) \\ &\qquad + 633(x_3+10)^2 - 2\cdot 405(x_3+10)(x_4-1) + 404(x_4-1)^2\Big)\bigg\}, \end{aligned}$$

minden $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ esetén. □

2.8.5. Feladat. (Sveshnikov [14], Example 19.2) Legyen (X,Y,Z) 3-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x,y,z) := \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{8}\Big(2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2\Big)\right\}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Határozzuk meg (X,Y,Z) kovariancia mátrixát!

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$f(x,y,z) = c_1 f_1(x)\cdot c_2 f_2(y,z), \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R},$$

ahol

$$c_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}, \qquad f_1(x) := \mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$c_2 := \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{2\pi}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}, \quad f_2(y,z) := \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{2y(z+5)}{4} + \frac{(z+5)^2}{4}\right)\right\}, \quad y,z \in \mathbb{R}.$$

Felhasználva, hogy f felbontható X és (Y, Z) sűrűségfüggvényeinek a szorzatára, kapjuk, hogy X és (Y, Z) függetlenek. Továbbá, tudva azt, hogy egy többdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó bármely részkoordinátája is többdimenziós normális eloszlású, kapjuk, hogy X és (Y, Z) is normális eloszlásúak. Így $X \sim \mathcal{N}(0, 2)$, továbbá a 2.8.1. Feladat alapján $\mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{E}Z = -5$, és a $\rho := \operatorname{corr}(Y, Z)$ jelöléssel:

$$\frac{1}{(1-\rho^2)\mathbb{D}^2Y} = 1, \qquad \frac{\rho}{(1-\rho^2)\mathbb{D}Y\mathbb{D}Z} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{(1-\rho^2)\mathbb{D}^2Z} = \frac{1}{4}.$$

Az első és a harmadik egyenlet alapján $\frac{\mathbb{D}^2Z}{\mathbb{D}^2Y} = 4$, azaz $\mathbb{D}Z = 2\mathbb{D}Y$. Így az első egyenletet osztva a második egyenlettel, kapjuk, hogy $\frac{2}{\rho} = 4$, azaz $\rho = \frac{1}{2}$. Ezért

$$\mathbb{D}^2Y = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}, \qquad \mathbb{D}^2Z = \frac{16}{3},$$

és így

$$\operatorname{cov}(Y, Z) = \rho\mathbb{D}Y\mathbb{D}Z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{8}{2\cdot 3} = \frac{4}{3}.$$

Ezért (X, Y, Z) kovariancia mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy a 2.8.1. Feladatot használva, a korábbiak ellenőrzéseképpen, a c_2 konstanst direktben is meghatározhatjuk:

$$c_2 = \frac{1}{2\pi\mathbb{D}Y\mathbb{D}Z\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{16}{3}}\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\pi\frac{2\cdot 4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}.$$

□

2.8.6. Feladat. Ledobunk a $[-1, 1]$ intervallumra egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint 2700 db pontot. Adjunk jó közelítő becslést egy standard normális eloszlástáblázat segítségével annak a valószínűségére, hogy a kapott pontok értékeinek az összege nagyobb, mint 15, és négyzetösszege nagyobb, mint 880. (A feladat úgy értendő, hogy annak a valószínűségét kell kiszámítani, hogy mind a két esemény bekövetkezik.)

Megoldás. Jelölje $\xi_1, \dots, \xi_{2700}$ a ledobott pontokat. Feladatunk a

$$P\left(\sum_{i=1}^{2700}\xi_i > 15, \sum_{i=1}^{2700}\xi_i^2 > 880\right)$$

valószínűségre becslést adni. Ekkor $\xi_1, \dots, \xi_{2700}$ függetlenek, azonos eloszlásúak, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$,

$$\mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{D}^2\xi_1 + (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \mathbb{D}^2\xi = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{D}^2\xi_1^2 = \mathbb{E}\xi_1^4 - (\mathbb{E}\xi_1^2)^2 = \mathbb{E}\xi_1^4 - \frac{1}{9} = \int_{-1}^{1} x^4\frac{1}{2}\,\mathsf{d}x - \frac{1}{9} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{9} = \frac{2}{10} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45},$$

és $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1^2) = \mathbb{E}\xi_1^3 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_1^2 = 0 - 0 = 0$. Továbbá,

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \xi_i^2 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \dots, 2700,$$

is függetlenek, azonos eloszlásúak, és az előzőek alapján közös várható érték vektoruk

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

illetve közös kovariancia mátrixuk

$$V := \begin{pmatrix} \mathbb{D}^2\xi_1 & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1^2) \\ \operatorname{cov}(\xi_1^2, \xi_1) & \mathbb{D}^2\xi_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{45} \end{pmatrix}.$$

A többdimenziós központi határeloszlás tétel szerint

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \xi_i - n\mathbb{E}\xi_1 \\ \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - n\mathbb{E}\xi_1^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V \right) \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Felhasználva, hogy egy többdimenziós normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó esetén a koordináták korrelálatlanságából következik azok függetlensége, kapjuk, hogy ha η_1 és η_2 olyan független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\eta_1 = \mathbb{E}\eta_2 = 0$ és $\mathbb{D}^2\eta_1 = \frac{1}{3}$, $\mathbb{D}^2\eta_2 = \frac{4}{45}$, úgy

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V \right).$$

Így

$$\begin{aligned}
&P\left(\sum_{i=1}^{2700} \xi_i > 15, \sum_{i=1}^{2700} \xi_i^2 > 880 \right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{2700} \xi_i - 2700 \cdot 0}{\sqrt{2700}} > \frac{15}{\sqrt{2700}}, \frac{\sum_{i=1}^{2700} \xi_i^2 - 2700\mathbb{E}\xi_1^2}{\sqrt{2700}} > \frac{880 - 2700\frac{1}{3}}{\sqrt{2700}} \right) \\
&\approx P\left(\eta_1 > \frac{15}{\sqrt{2700}}, \eta_2 > \frac{880 - 2700\frac{1}{3}}{\sqrt{2700}} \right) \\
&= P\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} > 0.5, \frac{\eta_2}{\sqrt{\frac{4}{45}}} > -\sqrt{\frac{5}{3}} \right).
\end{aligned}$$

Ezért, ha ζ_1 és ζ_2 független standard normális eloszlású valószínűségi változók, úgy

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{2700} \xi_i > 15, \sum_{i=1}^{2700} \xi_i^2 > 880 \right) &\approx P\left(\zeta_1 > 0.5,\, \zeta_2 > -\sqrt{\frac{5}{3}} \right) = P(\zeta_1 > 0.5) P\left(\zeta_2 > -\sqrt{\frac{5}{3}} \right) \\
&= (1 - \Phi(0.5)) \left(1 - \Phi\left(-\sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) = (1 - \Phi(0.5)) \Phi\left(\sqrt{\frac{5}{3}} \right) \\
&\approx (1 - 0.6915) \cdot 0.9015 \approx 0.2781.
\end{aligned}$$

□

2.8.7. Feladat. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók ugyanazzal a várható értékkel és szórásnégyzettel (azaz $\xi_1, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlásúak is). Mutassuk meg, hogy $\overline{\xi} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ és $(\xi_1 - \overline{\xi}, \ldots, \xi_n - \overline{\xi})$ függetlenek, továbbá, hogy $(\xi_1 - \overline{\xi}, \ldots, \xi_n - \overline{\xi})$ eloszlása nem függ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ közös várható értékétől.

Megoldás. (Major Péter megoldása) A megoldás során felhasználjuk a már korábban is említett, abszolút folytonos valószínűségi változók transzformáltjának sűrűségfüggvényére vonatkozó tételt, amit a teljesség kedvéért újra leírunk.

Tétel: Legyen $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ egy n-dimenziós abszolút folytonos valószínűségi változó $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvénnyel. Legyen továbbá $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertálható, sima leképezés és $(\eta_1, \ldots, \eta_n) := T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Ekkor $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ is abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} \frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{|J_T(x_1,\ldots,x_n)|} & \text{ha} \quad (y_1, \ldots, y_n) = T(x_1, \ldots, x_n), \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol J_T a T leképezés Jacobi-determinánsa. (Ekkor g jóldefiniált, mert T invertálható: bármilyen $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén az $(y_1, \ldots, y_n) = T(x_1, \ldots, x_n)$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása van.)

Legyen $\eta_k := \xi_k - \overline{\xi}$, $k = 1, \ldots, n$. Ekkor

$$(\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 - \overline{\xi}, \ldots, \xi_n - \overline{\xi}),$$

és

$$\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k = \sum_{k=1}^{n-1}(\xi_k - \overline{\xi}) = n\overline{\xi} - \xi_n - (n-1)\overline{\xi} = -(\xi_n - \overline{\xi}) = -\eta_n.$$

Így elég megmutatni, hogy az $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \overline{\xi})$ valószínűségi változó utolsó koordinátája független az első $(n-1)$ koordinátájától. Ugyanis ekkor független azok tetszőleges lineáris kombinációjától is, és így $-\eta_n$-től is. Megmutatjuk, hogy $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \overline{\xi})$ is abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye a megfelelő módon szorzat alakúra bomlik. Ebből már következik a kérdéses függetlenség. Definiáljunk egy $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést a következő módon:

$$T_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$T_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor T lineáris, így sima és Jacobi-determinánsa konstans. Valóban, minden $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ esetén

$$\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}\Bigg|_{(x_1,\dots,x_n)}=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n}\end{pmatrix}.$$

Így $J_T(x_1,\dots,x_n)=1/n$ minden $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ esetén. Leellenőrizzük, hogy T invertálható is. Legyen $(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ rögzített és $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ olyan, hogy $T(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$. Ekkor

$$\begin{aligned}y_k&=x_k-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j,\quad 1\leqslant k\leqslant n-1,\\ y_n&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j.\end{aligned}$$

Így $x_k=y_k+y_n$, $k=1,\dots,n-1$, és

$$x_n=ny_n-\sum_{j=1}^{n-1}x_j=ny_n-\sum_{j=1}^{n-1}(y_j+y_n)=ny_n-\sum_{j=1}^{n-1}y_j-(n-1)y_n=y_n-\sum_{j=1}^{n-1}y_j.$$

Azaz egyetlen olyan $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ létezik, melyre fennáll, hogy $T(x_1,\dots,x_n)=(y_1,\dots,y_n)$, és így T invertálható. Mivel $T(\xi_1,\dots,\xi_n)=(\eta_1,\dots,\eta_{n-1},\overline{\xi})$, az újra felidézett tétel alapján kapjuk, hogy $(\eta_1,\dots,\eta_{n-1},\overline{\xi})$ abszolút folytonos és sűrűségfüggvénye

$$g_{\eta_1,\dots,\eta_{n-1},\overline{\xi}}(y_1,\dots,y_n)=n\cdot f_{\xi_1,\dots,\xi_n}\Big(y_1+y_n,\dots,y_{n-1}+y_n,y_n-\sum_{j=1}^{n-1}y_j\Big).$$

Legyen $\xi_1,\dots,\xi_n$ közös eloszlása $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Felhasználva, hogy

$$f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-m)^2}{\sigma^2}\Big\},\quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}g_{\eta_1,\dots,\eta_{n-1},\overline{\xi}}(y_1,\dots,y_n)&=\frac{n}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}(y_j+y_n-m)^2+\Big(y_n-\sum_{j=1}^{n-1}y_j-m\Big)^2\right)\right\}\\ &=\frac{n}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{(y_n-m)^2}{2\sigma^2/n}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}y_j^2+\left(\sum_{j=1}^{n-1}y_j\right)^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\overline{\xi}$ eloszlása $\mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$, kapjuk, hogy

$$g_{\eta_1,\dots,\eta_{n-1},\overline{\xi}}(y_1,\dots,y_n) = f_{\overline{\xi}}(y_n)\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n-1}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}y_j^2+\left(\sum_{j=1}^{n-1}y_j\right)^2\right)\right\}.$$

Ebből már következik a kérdéses függetlenség, és az is, hogy $(\xi_1-\overline{\xi},\dots,\xi_{n-1}-\overline{\xi})$ sűrűségfüggvénye az $(y_1,\dots,y_{n-1})$ helyen

$$\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n-1}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}y_j^2+\left(\sum_{j=1}^{n-1}y_j\right)^2\right)\right\},$$

ami nem függ m-től, a közös várható értéktől.

Az, hogy $(\xi_1-\overline{\xi},\dots,\xi_{n-1}-\overline{\xi})$ eloszlása nem függ $\xi_1,\dots,\xi_n$ közös várható értékétől, azaz m-től közvetlenül is adódik. Ugyanis $\xi_1 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sigma\zeta_1+m,\dots,\xi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sigma\zeta_n+m$, ahol $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Így

$$\begin{aligned}(\xi_1-\overline{\xi},\dots,\xi_{n-1}-\overline{\xi}) &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \Big(\sigma\zeta_1+m-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\sigma\zeta_k+m),\dots,\sigma\zeta_{n-1}+m-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\sigma\zeta_k+m)\Big)\\ &=\sigma\Big(\zeta_1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\zeta_k,\dots,\zeta_{n-1}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\zeta_k\Big)\\ &=\sigma\Big(\zeta_1-\overline{\zeta},\dots,\zeta_{n-1}-\overline{\zeta}\Big),\end{aligned}$$

ahol $\overline{\zeta} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\zeta_k$. Azt is látjuk, hogy $(\xi_1-\overline{\xi},\dots,\xi_{n-1}-\overline{\xi})$ eloszlása függ $\xi_1,\dots,\xi_n$ közös szórásnégyzetétől, azaz σ^2-től. □

2.8.8. Feladat. Legyen (X,Y,Z) egy 3-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó, melynek 0 a várható érték vektora és kovarianciamátrixa a következő alakú

$$D=\begin{pmatrix}1&\rho_1&\rho_3\\ \rho_1&1&\rho_2\\ \rho_3&\rho_2&1\end{pmatrix},$$

ahol $\rho_1=\mathrm{corr}(X,Y)$, $\rho_2=\mathrm{corr}(Y,Z)$ és $\rho_3=\mathrm{corr}(X,Z)$. Mutassuk meg, hogy

$$P(X>0,Y>0,Z>0)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4\pi}\Big(\arcsin\rho_1+\arcsin\rho_2+\arcsin\rho_3\Big).$$

(Mivel $|\rho_i|\leqslant 1$, $i=1,2,3$, kapjuk, hogy $\arcsin\rho_i$, $i=1,2,3$, értelmezett.)

Megoldás. Előadásból ismert, hogy ha ξ n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó $m\in\mathbb{R}^n$ várható érték vektorral és D kovarianciamátrixxal, úgy bármilyen $(k\times n)$-es B mátrix esetén $B\xi$ k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó Bm várható érték vektorral és $BDB^\top$ kovarianciamátrixxal. Így $(-X,-Y,-Z)$ is 3-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó $0 \in \mathbb{R}^3$ várható érték vektorral és D kovarianciamátrixxal (éljünk a $B = -I_{3\times 3}$ választással). Ezért

$$p := P(X > 0, Y > 0, Z > 0) = P(-X > 0, -Y > 0, -Z > 0) = P(X < 0, Y < 0, Z < 0).$$

Mivel

$$\Omega \setminus \{X < 0, Y < 0, Z < 0\} = \{X \geqslant 0\} \cup \{Y \geqslant 0\} \cup \{Z \geqslant 0\},$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 - p &= P\big(\{X \geqslant 0\} \cup \{Y \geqslant 0\} \cup \{Z \geqslant 0\}\big) = P\big(\{X > 0\} \cup \{Y > 0\} \cup \{Z > 0\}\big) \\ &= P(X > 0) + P(Y > 0) + P(Z > 0) \\ &\quad - P(X > 0, Y > 0) - P(X > 0, Z > 0) - P(Y > 0, Z > 0) \\ &\quad + P(X > 0, Y > 0, Z > 0). \end{aligned} \tag{2.8.52}$$

Felhasználva újra a megoldás elején idézett állítást kapjuk, hogy $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ és

$$(X,Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{pmatrix}\right), \quad (X,Z) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & \rho_3\\ \rho_3 & 1\end{pmatrix}\right),$$

$$(Y,Z) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & \rho_2\\ \rho_2 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Ezért $P(X > 0) = P(Y > 0) = P(Z > 0) = 1/2.$

Meghatározzuk most a $P(X > 0, Y > 0)$ valószínűséget, nevezetesen megmutatjuk, hogy

$$P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_1.$$

Mivel

$$\det\begin{pmatrix}1 & \rho_1\\ \rho_1 & 1\end{pmatrix} = 1 - \rho_1^2,$$

kapjuk, hogy (X,Y) eloszlása akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha $|\rho_1| < 1$.

Először azt az esetet vizsgáljuk, mikor $|\rho_1| = 1$, azaz $\rho_1 = \pm 1$. Ekkor, felhasználva, hogy $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{D}^2X = \mathbb{D}^2Y = 1$, kapjuk, hogy $P(Y = \pm X) = 1$. Ezért

$$P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0, \pm X > 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha} \quad \rho_1 = 1, \\ 0 & \text{ha} \quad \rho_1 = -1 \end{cases} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_1.$$

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $|\rho_1| < 1$. Ekkor (X,Y) abszolút folytonos eloszlású és a 2.8.1. Feladat alapján sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\left(x^2 - 2\rho_1 xy + y^2\right)\right\}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ezért

$$
\begin{aligned}
P(X>0,Y>0) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_1^2)}\left((x-\rho_1 y)^2+(1-\rho_1^2)y^2\right)\right\}\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-\rho_1 y}{\sqrt{1-\rho_1^2}}\right)^2+y^2\right)\right\}\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y.
\end{aligned}
$$

Hajtsuk végre az

$$
u := \frac{x-\rho_1 y}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \qquad v := y
$$

helyettesítést. Ekkor a transzformáció Jacobi-mátrixának determinánsa

$$
\det\begin{pmatrix}\sqrt{1-\rho_1^2} & \rho_1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \sqrt{1-\rho_1^2} > 0,
$$

így

$$
P(X>0,Y>0) = \int_0^{+\infty}\int_{-\frac{\rho_1 v}{\sqrt{1-\rho_1^2}}}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}\mathsf{d}u\,\mathsf{d}v.
$$

A 11. és 12. ábrákon ábrázoltuk az új integrálási tartományt.

Hajtsuk most végre az $u := r\cos\varphi$ és $v := r\sin\varphi$ helyettesítést. Ezen helyettesítés Jacobi-mátrixának determinánsa r. Az alábbiakban a $\rho_1\in(0,1)$, $\rho_1=0$ és $\rho_1\in(-1,0)$ eseteket külön tárgyaljuk.

Ha $\rho_1\in(0,1)$, úgy

$$
P(X>0,Y>0) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\pi-\beta}\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\right\} r\,\mathsf{d}\varphi\right)\mathsf{d}r,
$$

ahol

$$
\tan\beta = \frac{\sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho_1} \quad\Rightarrow\quad \beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho_1}\right).
$$

Így

$$
P(X>0,Y>0) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{r}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\int_0^{\pi-\beta} 1\,\mathsf{d}\varphi\right)\mathsf{d}r = \frac{\pi-\beta}{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi-\beta}{2\pi}.
$$

Felrajzolva egy ρ_1 és $\sqrt{1-\rho_1^2}$ hosszúságú befogókkal rendelkező derékszögű háromszöget, melyben $\tan\beta = \frac{\sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho_1}$, kapjuk, hogy $\cos\beta=\rho_1$. Így $\beta = \arccos\rho_1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\rho_1$. Ezért

$$
P(X>0,Y>0) = \frac{\pi-\beta}{2\pi} = \frac{\pi-\pi/2+\arcsin\rho_1}{2\pi} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_1.
$$

Ha $\rho_1 \in (-1, 0)$, úgy

$$P(X > 0, Y > 0) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\beta} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r \, \mathsf{d}\varphi \right) \mathsf{d}r,$$

ahol

$$\tan\beta = -\frac{\sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho_1} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \arctan\left(-\frac{\sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho_1} \right).$$

Felrajzolva egy $-\rho_1$ és $\sqrt{1-\rho_1^2}$ hosszúságú befogókkal rendelkező derékszögű háromszöget, melyben $\tan\beta = -\frac{\sqrt{1-\rho_1^2}}{\rho_1}$, kapjuk, hogy $\cos\beta = -\rho_1$. Így $\beta = \arccos(-\rho_1) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(-\rho_1)$. Ezért

$$P(X > 0, Y > 0) = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\arcsin(-\rho_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(\rho_1).$$

Ha $\rho_1 = 0$, úgy

$$P(X > 0, Y > 0) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r \, \mathsf{d}\varphi \right) \mathsf{d}r = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin(0).$$

Tehát

$$P(X > 0, Y > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_1,$$

és az is adódik, hogy

$$P(X > 0, Z > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_3, \qquad P(Y > 0, Z > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_2.$$

Ezért (2.8.52) alapján

$$1 - p = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\big(\arcsin\rho_1 + \arcsin\rho_2 + \arcsin\rho_3\big) \right) + p,$$

és így

$$\begin{aligned} P(X > 0, Y > 0, Z > 0) = p &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\big(\arcsin\rho_1 + \arcsin\rho_2 + \arcsin\rho_3\big)\Big) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\big(\arcsin\rho_1 + \arcsin\rho_2 + \arcsin\rho_3\big). \end{aligned}$$

□

2.8.9. Feladat. Minden $p \in \mathbb{N}$ esetén legyen ξ_p egy p-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, vezessük be továbbá tetszőleges $a \in \mathbb{R}^p$ esetén a $H_p(a) := \mathbb{E}|\xi_p + a|$ jelölést. Mutassuk meg, hogy $p > 1$ esetén

(i)

$$H_p(a) = (p-1)\int_0^{\infty} H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+r^2}} \right) \frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}} \, \mathsf{d}r,$$

(ii)

$$H_p(a) = \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}} H_1(0) \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^r \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{(-1)^{p+2r-2}+1}{2}} \frac{(p+2r-1)!!}{(p+2r-2)!!},$$

ahol $\lambda := \sum_{i=1}^p a_i^2$.

A feladat (i) része a 2004. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny 10. feladata volt, (ii) része pedig Iglói Endrével közös beszélgetéseink eredménye.

Megoldás. (i): Megoldásunk Varjú Péter mintamegoldásának részletezése. Az $r = \tan\varphi$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, helyettesítéssel:

(2.8.53)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+r^2}}\right) \frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}} \,\mathsf{d}r &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\right) \frac{(\tan\varphi)^{p-2}}{(1+\tan^2\varphi)^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} \,\mathsf{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_1\big(|a||\cos\varphi|\big)(\tan\varphi)^{p-2}(\cos^2\varphi)^{\frac{p}{2}-1} \,\mathsf{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_1\big(|a|\cos\varphi\big) \frac{(\sin\varphi)^{p-2}(\cos\varphi)^{p-2}}{(\cos\varphi)^{p-2}} \,\mathsf{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_1\big(|a|\cos\varphi\big)(\sin\varphi)^{p-2} \,\mathsf{d}\varphi.
\end{aligned}$$

Tegyük fel először, hogy $a \neq 0$. Jelölje F_p az $\mathbb{R}^p$ tér egységgömbjének azt a felét, mely $a \in \mathbb{R}^p$-re forgásszimmetrikus és az $a \in \mathbb{R}^p$ vektor irányába esik. Tekintsük $\mathbb{R}^p$-nek egy olyan $\{b_1, \ldots, b_p\}$ ortonormált bázisát, melyre $b_p := \frac{a}{|a|}$. A $\{b_1, \ldots, b_p\}$ bázis által meghatározott koordinátákról áttérve polárkoordinátákra, kapjuk, hogy F_p pontjai az alábbi módon paraméterezhetőek:

$$\begin{aligned}
y_1 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{p-2}\sin\theta_{p-1}, \\
y_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{p-2}\cos\theta_{p-1}, \\
y_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cos\theta_{p-2}, \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
y_{p-3} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4, \\
y_{p-2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\
y_{p-1} &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\
y_p &= r\cos\theta_1,
\end{aligned}$$

ahol $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta_i < \pi$, $i = 2, \ldots, p-2$, és $0 \leqslant \theta_{p-1} < 2\pi$ tetszőlegesek. Jelölje $J_p(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})$ az előző helyettesítés Jacobi-mátrixát. Ekkor $J_p(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})$-t az utolsó sora szerint kifejtve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
J_p(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) &= (-1)^{p+1} r\cos^2\theta_1(\sin\theta_1)^{p-2} J_{p-1}(r, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}) \\
&\quad + (-1)^{p+2}(-r)(\sin\theta_1)^p J_{p-1}(r, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}).
\end{aligned}$$

Így, felhasználva, hogy $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{aligned}|J_p(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})| &= r\big|(\cos^2\theta_1(\sin\theta_1)^{p-2} + (\sin\theta_1)^p)J_{p-1}(r, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\big|\\ &= r(\sin\theta_1)^{p-2}|J_{p-1}(r, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})|.\end{aligned}$$

Rekurzívan alkalmazva a fenti összefüggést, mivel $\sin\theta_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, p-2$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}|J_p(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})| &= r^{p-2}(\sin\theta_1)^{p-2}(\sin\theta_2)^{p-3}\cdots\sin\theta_{p-2}|J_2(r, \theta_{p-1})|\\ &= r^{p-1}(\sin\theta_1)^{p-2}(\sin\theta_2)^{p-3}\cdots\sin\theta_{p-2}.\end{aligned}$$

Vezessük be a $G_p := \big\{y \in \mathbb{R}^p : |y| = 1\big\}$ és a

$$C := \int_0^\pi (\sin\theta_2)^{p-3}\,\mathsf{d}\theta_2 \int_0^\pi (\sin\theta_3)^{p-4}\,\mathsf{d}\theta_3 \cdots \int_0^\pi \sin\theta_{p-2}\,\mathsf{d}\theta_{p-2} \int_0^{2\pi} 1\,\mathsf{d}\theta_{p-1},$$

jelölést. Így (2.8.53) és Simon és Baderko [12, 1.7.12 Feladat] alapján, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+r^2}}\right)\frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,\mathsf{d}r &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_1\big(|a|\cos\varphi\big)(\sin\varphi)^{p-2}\,\mathsf{d}\varphi\\ &= \frac{1}{C}\int_{F_p\cap G_p} H_1(\langle a, v\rangle)\,\mathsf{d}\sigma(v),\end{aligned} \tag{2.8.54}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\langle a, v\rangle = |a||v|\cos\theta_1 = |a|\cos\theta_1, \qquad \text{ha } v \in F_p \cap G_p,$$

és a (2.8.54) második sorában levő integrál felületi integrál a félgömbfelületen. Továbbá, tetszőleges $y \in \mathbb{R}^p$ esetén, felhasználva, hogy $\theta_1 \in [0, \pi/2)$ esetén $\cos\theta_1 > 0$, Simon és Baderko [12, 1.7.12 Feladat] alapján kapjuk, hogy

$$\int_{F_p\cap G_p} |\langle y, v\rangle|\,\mathsf{d}\sigma(v) = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} |y|\cos\theta_1(\sin\theta_1)^{p-2}\,\mathsf{d}\theta_1 = C|y|\left[\frac{(\sin\theta_1)^{p-1}}{p-1}\right]_0^{\pi/2} = \frac{C|y|}{p-1}.$$

Így

$$\begin{aligned}H_p(a) &= \mathbb{E}|\xi_p + a|\\ &= \frac{p-1}{C}\mathbb{E}\left(\int_{F_p\cap G_p} |\langle \xi_p + a, v\rangle|\,\mathsf{d}\sigma(v)\right) = \frac{p-1}{C}\int_{F_p\cap G_p} \mathbb{E}|\langle \xi_p + a, v\rangle|\,\mathsf{d}\sigma(v),\end{aligned} \tag{2.8.55}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk a Fubini-tételt, ami azért alkalmazható, mert a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{E}|\xi_p + a| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}|\xi_p + a|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^p (a_i^2 + 1)} < \infty.$$

Mivel ξ_p többdimenziós standard normális eloszlású, tetszőleges $v \in \mathbb{R}^p$ esetén $\langle \xi_p, v\rangle$ 1-dimenziós normális eloszlású, és $v \in \mathbb{R}^p$, $|v| = 1$ esetén $\langle \xi_p, v\rangle$ 1-dimenziós standard normális eloszlású. Valóban, $v \in \mathbb{R}^p$, $|v| = 1$ esetén $\mathbb{E}\langle \xi_p, v\rangle = \langle \mathbb{E}\xi_p, v\rangle = 0$, és $\mathbb{D}^2(\langle \xi_p, v\rangle) = \sum_{i=1}^p v_i^2 = 1$. Így tetszőleges $v \in \mathbb{R}^p$, $|v| = 1$ esetén

$$\mathbb{E}|\langle \xi_p + a, v\rangle| = \mathbb{E}|\langle \xi_p, v\rangle + \langle a, v\rangle| = H_1(\langle a, v\rangle).$$

Ezért (2.8.55) és (2.8.54) alapján

$$H_p(a) = \frac{p-1}{C}\int_{F_p\cap G_p} H_1(\langle a, v\rangle)\,\mathsf{d}\sigma(v) = (p-1)\int_0^\infty H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+r^2}}\right)\frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,\mathsf{d}r.$$

Tegyük most fel, hogy $a = 0 \in \mathbb{R}^p$. Ekkor az előző gondolatmenet egy az egyben alkalmazható azzal a módosítással, hogy $\{b_1, \dots, b_p\}$-nek válasszuk $\mathbb{R}^p$ természetes bázisát. Adhatunk egyszerűbb indoklást is, felhasználva, hogy a Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel alapján (i) mindkét oldala folytonos $a = 0 \in \mathbb{R}^p$-ben.

(ii): Az (i) rész alapján $a = 0$-val, minden $p > 1$ esetén,

$$H_p(0) = (p-1)H_1(0)\int_0^\infty \frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,\mathsf{d}r = (p-1)H_1(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{p-2}\,\mathsf{d}\varphi. \tag{2.8.56}$$

Mivel $|\xi_p + a|^2$ p-szabadsági fokú, $\lambda := \sum_{i=1}^p a_i^2$ nemcentralitási paraméterű nemcentrális χ^2-eloszlású, kapjuk, hogy $|\xi_p + a|^2$ sűrűségfüggvénye

$$f_{|\xi_p+a|^2}(x) = \sum_{r=0}^\infty \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{r!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r f_{\chi^2_{p+2r}}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

lásd, pl., Iglói [1] 31. Feladat. Így a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\xi_p + a| &= \int_0^\infty \sqrt{x} f_{|\xi_p+a|^2}(x)\,\mathsf{d}x = \int_0^\infty 2x^2 f_{|\xi_p+a|^2}(x^2)\,\mathsf{d}x \\
&= \sum_{r=0}^\infty \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{r!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r \int_0^\infty 2x^2 f_{\chi^2_{p+2r}}(x^2)\,\mathsf{d}x \\
&= \sum_{r=0}^\infty \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{r!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r \int_0^\infty \sqrt{y} f_{\chi^2_{p+2r}}(y)\,\mathsf{d}y \\
&= \sum_{r=0}^\infty \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{r!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r \mathbb{E}\sqrt{\chi^2_{p+2r}} = \sum_{r=0}^\infty \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{r!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r H_{p+2r}(0).
\end{aligned}$$

Ezért (2.8.56) alapján,

$$H_p(a) = \mathbb{E}|\xi_p + a| = \mathsf{e}^{-\frac{\lambda}{2}}H_1(0)\sum_{r=0}^\infty \frac{p+2r-1}{r!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^r\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{p+2r-2}\,\mathsf{d}\varphi. \tag{2.8.57}$$

Az $x := \sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi/2)$, majd a $z = x^2$, $x \in [0,1)$, helyettesítéssel kapjuk, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^k \,\mathsf{d}\varphi &= \int_0^1 x^k \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{k+1}{2}-1}(1-z)^{\frac{1}{2}-1}\,\mathsf{d}z \\ &= \frac{1}{2}B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{(-1)^k+1}{2}} \frac{(k-1)!!}{k!!},\end{aligned} \tag{2.8.58}$$

ahol az utolsó lépés könnyen ellenőrizhető, páros $k \in \mathbb{N}$, illetve páratlan $k \in \mathbb{N}$ esetén külön-külön kiszámolva $\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$ értékét. A teljesség kedvéért ezt páros $k \in \mathbb{N}$ esetén elvégezzük. Legyen tehát $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, alakú, ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} &= \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n\Gamma(n)} = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)}{n(n-1)\Gamma(n-1)} \\ &= \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1)} = \frac{\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{2}-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{(k-1)(k-3)\cdots 1\sqrt{\pi}}{k(k-2)(k-4)\cdots 2} = \sqrt{\pi}\frac{(k-1)!!}{k!!}.\end{aligned}$$

Így (2.8.57) és (2.8.58) alapján kapjuk (ii)-t. □

3. Valószínűségszámítás 2. felmérő feladatsorok

3.1. 2001. év példái

3.1.1. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy a következő halmaz esemény:

$$\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\}.$$

Megoldás. Mivel egy $\mathbb{R}$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, az, hogy rögzített $\omega \in \Omega$ esetén $(\xi_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens azzal ekvivalens, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n, l \geqslant N : \quad |\xi_n(\omega) - \xi_l(\omega)| < \varepsilon,$$

vagy azzal is ekvivalens, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n \geqslant N : \quad |\xi_n(\omega) - \xi_N(\omega)| < \varepsilon.$$

Az első esetben

$$\begin{aligned}\left\{\omega \in \Omega : \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\right\} &= \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k,l\geqslant 0} \left\{\omega \in \Omega : |\xi_{n+k}(\omega) - \xi_{n+l}(\omega)| < \varepsilon\right\} \\ &= \bigcap_{m\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k,l\geqslant 0} \left\{\omega \in \Omega : |\xi_{n+k}(\omega) - \xi_{n+l}(\omega)| < 1/m\right\}.\end{aligned}$$

A második esetben

$$\big\{\omega\in\Omega : \exists \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\big\} = \bigcap_{m\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant 0}\big\{\omega\in\Omega \,:\, |\xi_{n+k}(\omega)-\xi_n(\omega)|<1/m\big\}.$$

Felhasználva azt, hogy az $\{|\xi_n-\xi_m|<\varepsilon\}$ típusú halmazok események, és azt, hogy egy σ-algebra zárt a megszámlálható unió- és metszetképzésre mindkét esetben kapjuk a dolgot.

Megjegyezzük, hogy az

$$\big\{\omega\in\Omega : \exists \lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\big\} = \bigcup_{c\in\mathbb{R}}\bigcap_{m\geqslant 1}\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant 0}\big\{\omega\in\Omega \,:\, |\xi_{n+k}(\omega)-c|<1/m\big\}$$

felbontással nem érünk célba, mert egy σ-algebra nem feltétlenül zárt a tetszőleges számosságú unióképzésre. □

3.1.2. Feladat. Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\xi^2+\eta^2$ exponenciális eloszlású $\frac{1}{2}$ paraméterrel.

Első megoldás. A feltételek miatt $\xi^2+\eta^2$ eloszlása 2-szabadsági fokú χ_2-eloszlás, azaz $p=2/2=1$-rendű és $\lambda=1/2$ paraméterű gamma-eloszlás. Így $\xi^2+\eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^0e^{-x/2}2^{-1}}{1}=\frac{1}{2}e^{-x/2} & \text{ha}\quad x>0,\\ 0 & \text{ha}\quad x\leqslant 0,\end{cases}$$

ez pedig nem más, mint a $\lambda=1/2$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye.

Második megoldás. Mivel ξ és η függetlenek, így ξ^2 és η^2 is függetlenek. A konvolúciós képlet alapján számolunk majd. Először meghatározzuk ξ^2 és η^2 sűrűségfüggvényét. Ekkor $F_{\xi^2}(x)=P(\xi^2<x)=0$, ha $x\leqslant 0$, és minden $x>0$ esetén

$$\begin{aligned}F_{\xi^2}(x)&=P(\xi^2<x)=P(-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x})=P(\xi<\sqrt{x})-P(\xi\leqslant-\sqrt{x})\\&=P(\xi<\sqrt{x})-P(\xi<-\sqrt{x})=P(\xi<\sqrt{x})-(1-P(\xi<\sqrt{x}))\\&=2P(\xi<\sqrt{x})-1=2F_\xi(\sqrt{x})-1,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy ξ szimmetrikus és folytonos eloszlásfüggvényű. Így

$$f_{\xi^2}(x)=\begin{cases}2f_\xi(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2} & \text{ha}\quad x>0,\\ 0 & \text{ha}\quad x\leqslant 0.\end{cases}$$

Ugyanez lesz η^2 sűrűségfüggvénye is. Így a konvolúciós képlet alapján

$$f_{\xi^2+\eta^2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi^2}(x)f_{\eta^2}(z-x)\,\mathrm{d}x,\qquad z\in\mathbb{R}.$$

Ezért $z \leqslant 0$ esetén $f_{\xi^2+\eta^2}(z) = 0$, ha pedig $z > 0$, akkor

$$
\begin{aligned}
f_{\xi^2+\eta^2}(z) &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(z-x)}} e^{-(z-x)/2} \, \mathsf{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}} e^{-z/2} \, \mathsf{d}x \\
&= \frac{e^{-z/2}}{2\pi} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{z^2/4 - (x-z/2)^2}} \, \mathsf{d}x = \frac{e^{-z/2}}{z\pi} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-z/2}{z/2}\right)^2}} \, \mathsf{d}x \\
&= \frac{e^{-z/2}}{z\pi} \left[\frac{z}{2} \arcsin\left(\frac{x - z/2}{z/2} \right) \right]_{x=0}^{x=z} = \frac{e^{-z/2}}{z\pi} \left(\frac{z}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2}\frac{-\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{-z/2}.
\end{aligned}
$$

Így látjuk, hogy $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye megegyezik az $1/2$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényével, így kapjuk az állítást.

Megjegyezzük, hogy a

$$
\int_0^z x^{-1/2}(z-x)^{-1/2} \, \mathsf{d}x
$$

integrál kiszámolható egyszerűbben is. Nevezetesen, az $x = yz$ helyettesítés után

$$
\begin{aligned}
\int_0^z x^{-1/2}(z-x)^{-1/2} \, \mathsf{d}x &= \int_0^1 (yz)^{-1/2}(z-yz)^{-1/2} z \, \mathsf{d}y = \int_0^1 y^{-1/2}(1-y)^{-1/2} \, \mathsf{d}y \\
&= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi,
\end{aligned}
$$

ugyanis, minden $\alpha > 0$, $\beta > 0$ konstans esetén a béta-függvényre vonatkozó azonosság alapján

$$
\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \, \mathsf{d}x = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
$$

□

3.1.3. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$
\lim_{n\to\infty} P(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}
$$

Megoldás. Ekkor

$$
\begin{aligned}
P(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x) &= P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x/n) = 1 - P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k \geqslant x/n) \\
&= 1 - P(\xi_k \geqslant x/n, \; k = 1, \ldots, n) = 1 - [P(\xi_1 \geqslant x/n)]^n \\
&= 1 - [1 - P(\xi_1 < x/n)]^n.
\end{aligned}
$$

Így, ha $x \leqslant 0$, akkor

$$
P(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x) = 1 - [1-0]^n = 0,
$$

ha pedig $x > 0$, akkor

$$P(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x) = 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda x/n})]^n = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Így látjuk, hogy a $P(n \min_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k < x)$ valószínűség nem függ n-től, és ezért kapjuk az állítást. □

3.1.4. Feladat. Bizonyítandó, hogy ha ξ_n tart ξ-hez sztochasztikusan, illetve ha η_n tart η-hoz sztochasztikusan, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart $a\xi + b\eta$-hoz sztochasztikusan.

3.1.5. Feladat. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén P_n az a valószínűségi mérték $[0, 1]$-en, mely $\frac{1}{n}$ súlyt helyez az $\frac{i-1}{n}$, $i = 1, \cdots, n$ pontok mindegyikébe. Mutassuk meg, hogy P_n gyengén konvergál a $[0, 1]$-en értelmezett Lebesgue-mértékhez.

3.2. 2003. év példái

3.2.1. Feladat. (A1) Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \to \xi$ és $\xi_n \to \eta$ sztochasztikusan, akkor $P(\xi = \eta) = 1$.

3.2.2. Feladat. (A2) Legyenek ξ és η független valószínűségi változók $P(\xi = k) = P(\eta = k) = p(1 - p)^k$, $k = 0, 1, \ldots$ eloszlással. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $n = 0, 1, \ldots$ és $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén

$$P\big(\xi = k \,|\, \xi + \eta = n\big) = \frac{1}{n+1}.$$

3.2.3. Feladat. (A3) Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. Bizonyítandó, hogy

$$P\Big(\big\{|\xi_n| > n \text{ véges sok } n \in \mathbb{N}\text{-re}\big\}\Big) = 1.$$

3.2.4. Feladat. (A4) Bizonyítandó, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén ξ_n binomiális eloszlású (n, p_n) paraméterekkel, $p_n \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, és $p_n \to p \in (0, 1)$, akkor $\frac{\xi_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, amint $n \to \infty$.

3.2.5. Feladat. (B1) Bizonyítandó, hogy ha $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$ sztochasztikusan és $P(\xi = \eta) = 1$, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén $P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

3.2.6. Feladat. (B2) Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $\mathbb{E}\xi_k = 0$, $\mathbb{E}\xi_k^2 = 1$ és $\mathbb{E}\xi_k^4 < +\infty$, ha $k = 1, \ldots, n$. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Bizonyítandó, hogy $\mathbb{E}(S_n^3) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k^3)$ és $\mathbb{E}(S_n^4) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k^4) + 3k(k-1)$.

3.2.7. Feladat. (B3) Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| < +\infty$. Bizonyítandó, hogy

$$P\Big(\big\{\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0\big\}\Big) = 1.$$

3.2.8. Feladat. (B4) Bizonyítandó, hogy ha minden $\lambda \in (0, +\infty)$ esetén ξ_λ Poisson eloszlású λ paraméterrel, akkor $\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, amint $\lambda \to \infty$.

3.3. 2004. év példái

1.Zh

3.3.1. Feladat. (A1) (Rényi [2], 2.6.54.) Legyenek X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók, közös sűrűségfüggvényük $f(x) := \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét!

Megoldás. A konvolúciós képlet alapján

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(x-y) \,\mathsf{d}y = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|}e^{-|x-y|} \,\mathsf{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ha $x \geqslant 0$, akkor

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{y}e^{-(x-y)} \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}\int_{0}^{x} e^{-y}e^{-(x-y)} \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}\int_{x}^{+\infty} e^{-y}e^{x-y} \,\mathsf{d}y \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\int_{-\infty}^{0} e^{2y} \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}e^{-x}\int_{0}^{x} 1 \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-2y} \,\mathsf{d}y \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{4}e^{-x}x + \frac{1}{4}e^{x}\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_{x}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}xe^{-x} + \frac{1}{4}e^{x}\frac{e^{-2x}}{2} \\
&= \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} + \frac{1}{8}e^{-x} = \frac{1}{4}e^{-x}(1+x).
\end{aligned}$$

Hasonlóan, ha $x < 0$, akkor

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x} e^{y}e^{-(x-y)} \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}\int_{x}^{0} e^{y}e^{x-y} \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} e^{-y}e^{x-y} \,\mathsf{d}y \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{2y} \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}e^{x}\int_{x}^{0} 1 \,\mathsf{d}y + \frac{1}{4}e^{x}\int_{0}^{+\infty} e^{-2y} \,\mathsf{d}y \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_{-\infty}^{x} + \frac{1}{4}e^{x}(-x) + \frac{1}{4}e^{x}\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{4}(-x)e^{x} + \frac{1}{4}e^{x}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{8}e^{x} + \frac{1}{4}(-x)e^{x} + \frac{1}{8}e^{x} = \frac{1}{4}e^{x}(1-x).
\end{aligned}$$

Így

$$f_{X+Y}(x) = \frac{|x|+1}{4}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

3.3.2. Feladat. (A2) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz és $P(\xi = \eta) = 1$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén $P(|\xi_n - \eta_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

3.3.3. Feladat. (A3) Mutassuk meg, hogy ha $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sztochasztikusan korlátos, azaz

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} P(|\xi_n| > R) = 0,$$

valamint η_n tart sztochasztikusan 0-hoz, akkor $\xi_n\eta_n$ tart sztochasztikusan 0-hoz.

3.3.4. Feladat. (A4) Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók és $p > 0$ olyan, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $P(\xi_n \to 0) = 1$.

3.3.5. Feladat. (B1) Legyenek X és Y független, a $[-1/2, 1/2]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $X + Y$ sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Ekkor

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \in [-1/2, 1/2], \\ 0 & \text{ha} \quad x \notin [-1/2, 1/2], \end{cases}$$

és a konvolúciós képlet alapján

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) f_Y(x-y) \,\mathsf{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az integrandus akkor lesz nullától különböző (és ekkor 1-el egyenlő), ha

$$-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad -\frac{1}{2} \leqslant x - y \leqslant \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad x - \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{2}.$$

Ha $x - 1/2 > 1/2$, azaz $x > 1$, akkor $[-1/2, 1/2] \cap [x - 1/2, x + 1/2] = \emptyset$.

Ha $x - 1/2 \in [-1/2, 1/2]$, azaz $x \in [0, 1]$, akkor $[-1/2, 1/2] \cap [x - 1/2, x + 1/2] = [x - 1/2, 1/2]$.

Ha $x - 1/2 \in [-3/2, -1/2[$, azaz $x \in [-1, 0]$, akkor $[-1/2, 1/2] \cap [x - 1/2, x + 1/2] = [-1/2, x + 1/2]$.

Ha $x - 1/2 < -3/2$, azaz $x < -1$, akkor $[-1/2, 1/2] \cap [x - 1/2, x + 1/2] = \emptyset$.

Így, ha $x \in [0, 1]$, akkor

$$f_{X+Y}(x) = \int_{x-1/2}^{1/2} 1 \,\mathsf{d}y = 1 - x,$$

ha $x \in [-1, 0[$, akkor

$$f_{X+Y}(x) = \int_{-1/2}^{x+1/2} 1 \,\mathsf{d}y = x + 1,$$

ha pedig $|x| > 1$, akkor $f_{X+Y}(x) = 0$. Ezért

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{ha} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

□

3.3.6. Feladat. (B2) Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart sztochasztikusan $a\xi + b\eta$-hoz.

3.3.7. Feladat. (B3) (Rényi [2], 3.2.7.) Legyen c_n, $n \in \mathbb{N}$ egy konvergens valós számsorozat, ν_n, $n \in \mathbb{N}$ pedig pozitív egész értékű valószínűségi változók sorozata, hogy $P(\nu_n \to \infty) = 1$. Mutassuk meg, hogy c_{ν_n} tart sztochasztikusan a c_n, $n \in \mathbb{N}$ sorozat határértékéhez.

Első megoldás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Azt kell megmutatni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(|c_{\nu_n} - \lim_{n\to\infty} c_n| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Legyen $c := \lim_{n\to\infty} c_n$. Ekkor létezik olyan $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|c_n - c| < \varepsilon$, ha $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)) = 1. \tag{3.3.59}$$

Ekkor $P(\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)\}}$ és

$$\mathbb{1}_{\{\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \nu_n(\omega) \geqslant n_0(\varepsilon), \\ 0 & \text{ha} \quad \nu_n(\omega) < n_0(\varepsilon) \end{cases} \longrightarrow 1 \quad \text{P-m.m.} \ \ \omega,$$

hiszen $P(\nu_n \to +\infty) = 1$. Így a dominált konvergencia tétel szerint

$$P(\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)\}} \to 1.$$

Így (3.3.59) alapján bármilyen $\delta \in (0,1)$ esetén létezik olyan $n_1 := n_1(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geqslant n_1$ esetén $P(\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)) > 1 - \delta$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(|c_{\nu_n} - c| < \varepsilon) &= P(|c_{\nu_n} - c| < \varepsilon, \nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)) + P(|c_{\nu_n} - c| < \varepsilon, \nu_n < n_0(\varepsilon)) \\ &\geqslant P(\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)) + P(|c_{\nu_n} - c| < \varepsilon, \nu_n < n_0(\varepsilon)), \end{aligned}$$

hiszen a korábbiak miatt

$$\{\nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)\} \subseteq \big\{|c_{\nu_n} - c| < \varepsilon, \nu_n \geqslant n_0(\varepsilon)\big\}.$$

Ezért bármilyen $\delta \in (0,1)$ esetén létezik olyan $n_1 \in \mathbb{N}$, hogy

$$P(|c_{\nu_n} - c| < \varepsilon) \geqslant 1 - \delta, \quad \text{ha} \ \ n \geqslant n_1.$$

És így

$$P(|c_{\nu_n} - c| \geqslant \varepsilon) \leqslant \delta, \quad \text{ha} \ \ n \geqslant n_1,$$

azaz $c_{\nu_n} \xrightarrow{st} c$.

Második megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy $P(c_{\nu_n} \to c) = 1$, és ebből már következik, hogy $c_{\nu_n} \xrightarrow{st} c$. Felhasználva, hogy

$$P\big(\{\omega \in \Omega : \nu_n(\omega) \to +\infty\}\big) = 1,$$

kapjuk, hogy

$$P(\{c_{\nu_n} \to c\}) = P(\{c_{\nu_n} \to c\} \cap \{\nu_n \to +\infty\}) = P(\nu_n \to +\infty) = 1,$$

ugyanis, ha $\omega \in \Omega$ olyan, hogy $\nu_n(\omega) \to +\infty$, akkor $c_n \to c$ miatt bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geqslant N_1(\varepsilon)$ esetén $|c_n - c| < \varepsilon$. Továbbá, létezik olyan $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geqslant N_2(\varepsilon)$ esetén $\nu_k(\omega) > N_1(\varepsilon)$. Ezért, ha $n \geqslant \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, akkor $|c_{\nu_n(\omega)} - c| < \varepsilon$. $\square$

3.3.8. Feladat. **(B4)** Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók és $p > 0$ olyan, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_n|^p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $P(\xi_n \to 0) = 1$.

2.Zh

3.3.9. Feladat. **(A1)** Legyenek $\xi_n, n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty.$$

3.3.10. Feladat. **(A2)** Legyen X egy nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke véges. Mutassuk meg, hogy $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$.

3.3.11. Feladat. **(A3)** Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\limsup_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = +\infty\right) = 1.$$

3.3.12. Feladat. **(A4)** Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x \to \infty} x^{\alpha}(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített $\alpha, b \in (0, +\infty)$ konstansokkal. Mutassuk meg, hogy $n^{-1/\alpha} M_n$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye

$$\begin{cases} e^{-bx^{-\alpha}} & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

3.3.13. Feladat. **(A5)** Legyenek $X_n, n \in \mathbb{Z}_+$ független, azonos eloszlású (valós) valószínűségi változók, hogy $P(X_1 \geqslant 1) = 1$. Tekintsük az alábbi („véletlen együtthatós") hatványsort

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jelölje R ezen hatványsor konvergenciasugarát. Mutassuk meg, hogy $P(R \in \{0, 1\}) = 1$.

3.3.14. Feladat. **(B1)** Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\xi_n|}{n} = +\infty\right) = 1.$$

3.3.15. Feladat. **(B2)** Legyen X egy nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke véges. Mutassuk meg, hogy $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$.

3.3.16. Feladat. **(B3)** Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ független, Cauchy-eloszlású valószínűségi változók. Legyen $S_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty\right) = 1.$$

3.3.17. Feladat. **(B4)** Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $F(x) < 1$, $x \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}(1 - F(x)) = b$ valamely rögzített $\lambda, b \in (0, +\infty)$ konstansokkal. Mutassuk meg, hogy $M_n - \frac{\ln n}{\lambda}$ eloszlásban konvergál egy olyan valószínűségi változóhoz, aminek eloszlásfüggvénye $\exp\{-be^{-\lambda x}\}$, $x \in \mathbb{R}$.

3.3.18. Feladat. **(B5)** Legyenek $X_n, n \in \mathbb{Z}_+$ független, azonos eloszlású (valós) valószínűségi változók, hogy $P(X_1 \geqslant 1) = 1$. Tekintsük az alábbi („véletlen együtthatós") hatványsort

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jelölje R ezen hatványsor konvergenciasugarát. Mutassuk meg, hogy $P(R \in \{0, 1\}) = 1$.

3.4. 2005. év példái

1.Zh

3.4.1. Feladat. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg az $\eta := \frac{\xi}{1+\xi}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét!

3.4.2. Feladat. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 3$ és $\mathbb{D}^2\xi = \mathbb{D}^2\eta = 9$. Határozzuk meg $\xi + \eta$ és $\xi \cdot \eta$ korrelációs együtthatóját!

3.4.3. Feladat. A konvolúciós képletet felhasználva mutassuk meg, hogy k db független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege k-adrendű, λ paraméterű gamma eloszlású.

3.4.4. Feladat. Legyenek ξ és η független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $\xi + \eta$ momentumgeneráló függvényét!

3.4.5. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, és ξ olyan valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}\xi_n^2 < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, és $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ha $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, akkor $\mathbb{E}\xi_n \to \mathbb{E}\xi$ és $\mathbb{E}\xi_n^2 \to \mathbb{E}\xi^2$.

2.Zh

3.4.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart sztochasztikusan $a\xi + b\eta$-hoz.

3.4.7. Feladat. Legyenek ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy $\mathbb{E}|\xi_1| = +\infty$. Mutassuk meg, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(|\xi_n| \geqslant \varepsilon n) = +\infty.$$

3.4.8. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 5.9.5.) Az inverziós formulát felhasználva mutassuk meg, hogy tetszőleges $a > 0$, $b > 0$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t^2}\,\mathsf{d}t = \pi \min(a, b).$$

Megoldás. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, hogy X egyenletes eloszlású a $[-a, a]$ intervallumon, Y egyenletes eloszlású a $[-b, b]$ intervallumon. Ekkor $\varphi_X(0) = 1$, és a 2.5.6. Feladat alapján

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \frac{1}{it2a}\Big(e^{ita} - e^{it(-a)}\Big) = \frac{1}{it2a} 2i\sin(ta) = \frac{\sin(ta)}{ta}, \qquad t \neq 0.$$

Hasonlóan,

$$\varphi_Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin(tb)}{tb} & \text{ha } \ t \neq 0, \\ 1 & \text{ha } \ t = 0. \end{cases}$$

Így

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \frac{\sin(ta)}{ta}\frac{\sin(tb)}{tb}, \qquad t \neq 0.$$

Megmutatjuk most, hogy $\varphi_{X+Y} \in L^1(\mathbb{R})$. A Cauchy-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin(ta)\sin(tb)}{abt^2}\right| \mathsf{d}t \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(ta)}{ta}\right)^2 \mathsf{d}t} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(tb)}{tb}\right)^2 \mathsf{d}t}.$$

Felhasználva a 2.5.9. Feladat megoldásában leírtakat, kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(ta)}{ta}\right)^2 \mathsf{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{a}\,\mathsf{d}x = \frac{\pi}{a}.$$

Ezért
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_{X+Y}(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{\frac{\pi}{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} < +\infty,$$
és így $\varphi_{X+Y} \in L^1(\mathbb{R})$.

Az inverziós-tétel alapján $X+Y$ abszolút folytonos eloszlású és
$$f_{X+Y}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_{X+Y}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\frac{\sin(ta)\sin(tb)}{abt^2}\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Az $x = 0$ választással
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ta)\sin(tb)}{t^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi ab f_{X+Y}(0).$$
Itt, a konvolúciós képlet alapján
$$f_{X+Y}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(0-z)f_Y(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\min(a,b)}^{\min(a,b)} \frac{1}{2a}\frac{1}{2b}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4ab}2\min(a,b) = \frac{\min(a,b)}{2ab}.$$

Így kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

Megjegyezzük, hogy $X+Y$ sűrűségfüggvénye (feltételezve, hogy $0 < a \leqslant b$):
$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \geqslant a+b, \\ \frac{1}{4ab}(a+b-x) & \text{ha} \quad b-a \leqslant x < b+a, \\ \frac{1}{2b} & \text{ha} \quad a-b \leqslant x < b-a, \\ \frac{1}{4ab}(x+a+b) & \text{ha} \quad -a-b \leqslant x < a-b, \\ 0 & \text{ha} \quad x < -a-b. \end{cases}$$

□

3.4.9. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 7.11.15.) Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Feltételezzük, hogy X_1 karakterisztikus függvénye φ_{X_1} differenciálható 0-ban és $\varphi'_{X_1}(0) = i\mu$, ahol $\mu \in \mathbb{R}$. A folytonossági tételt felhasználva mutassuk meg, hogy
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Megoldás. A folytonossági tétel alapján bizonyítunk. Az azonosan μ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi_\mu(t) = \mathbb{E}e^{it\mu} = e^{it\mu}$, $t \in \mathbb{R}$. Azt kell belátni, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}(t) = e^{it\mu}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Itt
$$\varphi_{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{it\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right\}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{n(\varphi_{X_1}(t/n) - 1)}{n}\right)^n.$$

A 2.5.12. Lemma alapján elég azt belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} n(\varphi_{X_1}(t/n) - 1) = it\mu, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$n(\varphi_{X_1}(t/n) - 1) = \frac{\varphi_{X_1}(t/n) - \varphi_{X_1}(0)}{1/n} = t\frac{\varphi_{X_1}(t/n) - \varphi_{X_1}(0)}{t/n - 0}, \qquad t \neq 0.$$

Felhasználva, hogy $\varphi'_{X_1}(0) = i\mu$, kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} n(\varphi_{X_1}(t/n) - 1) = it\mu$, $t \in \mathbb{R}$. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

Megjegyezzük, hogy a következő ,,megoldás" hibás. Mivel $\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1}$, $t \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$\varphi'_{X_1}(t) = \mathbb{E}\big(iX_1e^{itX_1}\big), \ t \in \mathbb{R}, \qquad \text{és így} \qquad \varphi'_{X_1}(0) = i\mathbb{E}X_1.$$

Ezért $\mathbb{E}X_1 = \mu \in \mathbb{R}$. Továbbá a nagy számok erős törvénye alapján

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \mu\right) = 1, \qquad \text{és így} \qquad \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mu.$$

A *hibát* a $\varphi'_{X_1}(t) = \mathbb{E}\big(iX_1e^{itX_1}\big)$, $t \in \mathbb{R}$, egyenlőség származtatásánál követtük el, nem biztos, hogy a határérték képzés és a várható érték képzés művelete felcserélhető. Ha $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$, akkor az előző két művelet biztosan felcserélhető. Azonban az, hogy $\mathbb{E}|X_1| < +\infty$ pusztán a feladat feltételeiből nem következik. Az alábbiakban erre nézünk egy példát.

Példa. (Medvegyev [6], 411. old.) *Legyen a ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2 \ln|x|} & \text{ha} \quad |x| > 2, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| \leqslant 2, \end{cases}$$

alkalmas $c > 0$ állandóval. Megmutatjuk, hogy ξ-nek nem létezik a várható értéke, de φ_ξ differenciálható a 0 pontban és $\varphi'_\xi(0) = 0$.

Először végiggondoljuk, hogy c megválasztható alkalmas módon. Egyrészt $c > 0$ kell legyen, másrészt

$$\frac{1}{c} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2 \ln(-x)} \,\mathrm{d}x = 2\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln t} \,\mathrm{d}t.$$

Mivel $x \geqslant 2$ esetén $\ln x \geqslant \ln 2 > 0$, kapjuk, hogy

$$0 < \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln 2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{2\ln 2} < +\infty.$$

Ezért
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x \in (0, +\infty),$$
és így c megválasztható alkalmas módon.

Megmutatjuk most, hogy ξ-nek nem létezik a várható értéke. Ehhez definíció szerint azt kell leellenőrizni, hogy $\mathbb{E}\xi^-$ és $\mathbb{E}\xi^+$ is $+\infty$, ahol $\xi^+ := \max(\xi, 0)$ és $\xi^- := -\min(\xi, 0)$. Itt
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi^+ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x,0) f_\xi(x) \, \mathsf{d}x = \int_2^{+\infty} x \frac{c}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x = c \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, \mathsf{d}x \\ &= c \left[\ln(\ln x)\right]_2^{+\infty} = +\infty.\end{aligned}$$
Hasonlóan
$$\mathbb{E}\xi^- = \int_{-\infty}^{+\infty} -\min(x,0) f_\xi(x) \, \mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{-2} -x \frac{c}{x^2 \ln(-x)} \, \mathsf{d}x = c \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t} \, \mathsf{d}t = +\infty.$$
Tehát $\mathbb{E}\xi^+ = +\infty$ és $\mathbb{E}\xi^- = +\infty$, így ξ-nek nem létezik a várható értéke.

Megmutatjuk most, hogy φ_ξ differenciálható a 0 pontban és $\varphi_\xi'(0) = 0$. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén
$$\begin{aligned}\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} &= \int_{-\infty}^{-2} e^{itx} \frac{c}{x^2 \ln(-x)} \, \mathsf{d}x + \int_2^{+\infty} e^{itx} \frac{c}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x = \int_2^{+\infty} \left(e^{it(-x)} + e^{itx}\right) \frac{c}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x \\ &= 2c \int_2^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x.\end{aligned}$$
(Vegyük észre, hogy mivel ξ eloszlása szimmetrikus, $\varphi_\xi(t) \in \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R}$, ami persze a fenti számolásból is látszik.) Felhasználva, hogy $1 = 2c \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x$, kapjuk, hogy
$$\frac{1 - \varphi_\xi(t)}{2c} = \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 \ln x} - \frac{\cos(tx)}{x^2 \ln x} \right) \mathsf{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
Végiggondoljuk most, hogy
$$0 \leqslant 1 - \cos u \leqslant \min(2, u^2), \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$
Az nyilván teljesül, hogy $0 \leqslant 1 - \cos u \leqslant 2$, $u \in \mathbb{R}$. Így csak azt kell leellenőriznünk, hogy $1 - \cos u \leqslant u^2$, $u \in \mathbb{R}$. Tekintsük az $f(u) := u^2 - (1 - \cos u)$, $u \in \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor $f(0) = 0 - (1 - 1) = 0$, és $f'(u) = 2u - \sin u \geqslant 0$, ha $u \geqslant 0$. Így f monoton növekvő a $[0, \infty)$ intervallumon, és ezért $u^2 \geqslant 1 - \cos u$, ha $u \geqslant 0$. Felhasználva, hogy u^2 és $1 - \cos u$ is páros függvény, kapjuk a dolgot.

Ezért
$$0 \leqslant \frac{1 - \varphi_\xi(t)}{2c} \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{\min(2, t^2 x^2)}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Így $0 < t < \sqrt{2}/2$ esetén

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{1-\varphi_\xi(t)}{2c} &\leqslant \int_2^{\sqrt{2}/t} \frac{\min(2, t^2x^2)}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x + \int_{\sqrt{2}/t}^{+\infty} \frac{\min(2, t^2x^2)}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x \\ &= \int_2^{\sqrt{2}/t} \frac{t^2x^2}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x + \int_{\sqrt{2}/t}^{+\infty} \frac{2}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x \\ &= t^2 \int_2^{\sqrt{2}/t} \frac{1}{\ln x} \, \mathsf{d}x + 2 \int_{\sqrt{2}/t}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x. \end{aligned}$$

Ezért

$$(3.4.60) \qquad 0 \leqslant 1-\varphi_\xi(t) \leqslant 2c \left(t^2 \int_2^{\sqrt{2}/t} \frac{1}{\ln x} \, \mathsf{d}x + 2 \int_{\sqrt{2}/t}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x \right), \quad \text{ha } 0 < t < \sqrt{2}/2.$$

Megmutatjuk, hogy $1 - \varphi_\xi(t) = o(t)$, amint $t \to 0$, azaz

$$\lim_{t \to 0} \frac{1-\varphi_\xi(t)}{t} = 0.$$

Ebből már következik, hogy

$$\varphi_\xi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_\xi(t) - 1}{t} = 0.$$

Először azt látjuk be, hogy $1 - \varphi_\xi(t) = O(-t/\ln t)$, amint $t \to 0$, azaz $\exists\, K > 0$ és $\exists$ $t_0 > 0$, hogy

$$(3.4.61) \qquad 1 - \varphi_\xi(t) = |1 - \varphi_\xi(t)| \leqslant K \left| -\frac{t}{\ln t} \right|, \qquad \text{ha } 0 < t < t_0.$$

(Azért elég (3.4.61)-ben csak a $0 < t < t_0$ intervallumot tekinteni a $-t_0 < t < t_0$ intervallum helyett, mert $\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.)

Ha $0 < t < t_0 < 1$, úgy $|-t/\ln t| = -t/\ln t$, így azt mutatjuk meg, hogy $\exists\, K > 0$ és $\exists\, 1 > t_0 > 0$, hogy

$$1 - \varphi_\xi(t) \leqslant K \frac{-t}{\ln t}, \qquad \text{ha } 0 < t < t_0.$$

Ehhez a határérték definíciója alapján, (3.4.60)-at felhasználva, elég belátni, hogy létezik a

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{t^2 \int_2^{\sqrt{2}/t} \frac{1}{\ln x} \, \mathsf{d}x}{-\frac{t}{\ln t}} \qquad \text{határérték és } > 0,$$

illetve létezik a

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\int_{\sqrt{2}/t}^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} \, \mathsf{d}x}{-\frac{t}{\ln t}} \qquad \text{határérték és } > 0.$$

Ekkor

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{t^2 \int_2^{\sqrt{2}/t} \frac{1}{\ln x} \, \mathsf{d}x}{-\frac{t}{\ln t}} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\int_2^{\sqrt{2}/t} \frac{1}{\ln x} \, \mathsf{d}x}{-\frac{1}{t \ln t}},$$

és ez utóbbi határérték „$\frac{+\infty}{+\infty}$"-típusú. Valóban, a $\mathcal{L}'$Hospital szabály alapján

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t\ln t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1/t}{\ln t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{-1/t^2}{1/t}=-\infty,$$

és

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_2^{\sqrt{2}/t}\frac{1}{\ln x}\,\mathsf{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\,\mathsf{d}x\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathsf{d}x=[\ln x]_2^{+\infty}=+\infty.$$

Így, újra a $\mathcal{L}'$Hospital szabály alapján

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{t^2\int_2^{\sqrt{2}/t}\frac{1}{\ln x}\,\mathsf{d}x}{-\frac{t}{\ln t}}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\frac{1}{\ln(\sqrt{2}/t)}\sqrt{2}\frac{-1}{t^2}}{\frac{+1(\ln t+t\frac{1}{t})}{t^2(\ln t)^2}}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{-\sqrt{2}\frac{(\ln t)^2}{\ln(\sqrt{2})-\ln t}}{\ln t+1}$$

$$=-\sqrt{2}\lim_{t\downarrow 0}\frac{(\ln t)^2}{(\ln\sqrt{2})\ln t+\ln(\sqrt{2})-(\ln t)^2-\ln t}=\sqrt{2}>0.$$

Hasonlóan,

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\int_{\sqrt{2}/t}^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}\,\mathsf{d}x}{-\frac{t}{\ln t}}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\frac{\sqrt{2}/t^2}{(\sqrt{2}/t)^2\ln(\sqrt{2}/t)}}{\frac{-1\ln t+t\frac{1}{t}}{(\ln t)^2}}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(\ln t)^2}{\ln(\sqrt{2})-\ln t}}{-(\ln t-1)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{t\downarrow 0}\frac{(\ln t)^2}{(\ln\sqrt{2})\ln t-\ln(\sqrt{2})-(\ln t)^2+\ln t}=\frac{1}{\sqrt{2}}>0.$$

Ezért $\exists\ K>0$ és $\exists\ 1>t_0>0$, hogy

$$\frac{1-\varphi_\xi(t)}{t}\leqslant K\frac{-1}{\ln t},\qquad \text{ha }\ 0<t<t_0.$$

Így

$$0\leqslant\limsup_{t\to 0}\frac{1-\varphi_\xi(t)}{t}\leqslant K\limsup_{t\downarrow 0}\frac{-1}{\ln t}=0,$$

és ezért $1-\varphi_\xi(t)=o(t)$, amint $t\to 0$. Így létezik $\varphi_\xi'(0)$ és $\varphi_\xi'(0)=0$. Ezzel befejeztük a példa bizonyítását.

Megjegyezzük, hogy érvényes az alábbi tétel.

Tétel. (Pitman) (Medvegyev [6], 792. old.) *Legyen ξ egy valószínűségi változó, F az eloszlásfüggvénye és φ a karakterisztikus függvénye. Legyen továbbá $k\in\mathbb{N}$* **páratlan** *szám. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek*

(i) *létezik* $\varphi^{(k)}(0)$,

(ii)

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}x^k\,\mathsf{d}F(x)\qquad\textit{létezik és véges,}$$

illetve teljesül, hogy $\lim_{x\to\infty}x^k(1-F(x)-F(-x))=0$.

A feltételek teljesülése esetén

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x^k \, \mathsf{d}F(x).$$

Az (i) *és* (ii) *feltétel ekvivalens azzal is, hogy független,* F *eloszlásfüggvényű valószínűségi változók* k*-adik hatványára teljesül a nagy számok gyenge törvénye.*

Konkrét feladatunk esetén Pitman-tételéből az is következik, hogy ha X_n, $n \in \mathbb{N}$, független, azonos eloszlású valószínűségi változók, hogy abszolút folytonosak és a közös sűrűségfüggvény

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2 \ln|x|} & \text{ha} \quad |x| > 2, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| \leqslant 2, \end{cases}$$

(alkalmas $c > 0$-val), úgy

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{st} 0,$$

azonban 0 *nem* a közös várható érték, hiszen az nem is létezik. Továbbá $\varphi'_{X_1}(0) = 0$. $\square$

3.4.10. Feladat. Legyen X egy olyan nemnegatív valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}X^2 < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P(X \geqslant \lambda) = 0$. (Segítség: Markov-egyenlőtlenség.)

3.5. 2006. év példái

1.Zh

3.5.1. Feladat. Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. A konvolúciós képletet felhasználva mutassuk meg, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású $\frac{1}{2}$ paraméterrel.

Megoldás. Lásd a 3.1.2. Feladat második megoldását. $\square$

3.5.2. Feladat. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók, hogy ξ p-edrendű, λ paraméterű gamma eloszlású és η p-edrendű, $\frac{\lambda}{2}$ paraméterű gamma eloszlású, ahol $p > 0$, $\lambda > 0$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbb{E}(\xi + \eta)^3 = \frac{9p(p+1)(3p+2)}{\lambda^3}.$$

Megoldás. Az 1.1.14. Feladat alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbb{E}\xi^n = \frac{\Gamma(p+n)}{\lambda^n \Gamma(p)} \qquad \mathbb{E}\eta^n = \frac{\Gamma(p+n)}{(\lambda/2)^n \Gamma(p)} = \frac{2^n \Gamma(p+n)}{\lambda^n \Gamma(p)}.$$

Felhasználva ξ és η függetlenségét

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi+\eta)^3 &= \mathbb{E}\big(\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + \eta^3\big) = \mathbb{E}\xi^3 + 3\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta + 3\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta^2 + \mathbb{E}\eta^3 \\ &= \frac{\Gamma(p+3)}{\lambda^3\Gamma(p)} + 3\frac{\Gamma(p+2)}{\lambda^2\Gamma(p)}\frac{2\Gamma(p+1)}{\lambda\Gamma(p)} + 3\frac{\Gamma(p+1)}{\lambda\Gamma(p)}\frac{4\Gamma(p+2)}{\lambda^2\Gamma(p)} + \frac{2^3\Gamma(p+3)}{\lambda^3\Gamma(p)}. \end{aligned}$$

Felhasználva az $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$, azonosságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi+\eta)^3 &= \frac{(p+2)(p+1)p\Gamma(p)}{\lambda^3\Gamma(p)} + 3\frac{(p+1)p\Gamma(p)}{\lambda^2\Gamma(p)}\frac{2p\Gamma(p)}{\lambda\Gamma(p)} + 3\frac{p\Gamma(p)}{\lambda\Gamma(p)}\frac{4(p+1)p\Gamma(p)}{\lambda^2\Gamma(p)} \\
&\quad + \frac{2^3(p+2)(p+1)p\Gamma(p)}{\lambda^3\Gamma(p)} \\
&= \frac{9}{\lambda^3}(p+2)(p+1)p + \frac{18}{\lambda^3}p^2(p+1) = \frac{9}{\lambda^3}p(p+1)\big(3p+2\big).
\end{aligned}$$

□

3.5.3. Feladat. Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(-1, 2)$ intervallumon. Legyen $\eta := \xi^3$. Határozzuk meg η eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét.

Megoldás. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leqslant -1, \\ \frac{x+1}{3} & \text{ha} \quad -1 < x < 2, \\ 1 & \text{ha} \quad x \geqslant 2, \end{cases} \qquad \text{és} \qquad f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{ha} \quad x \in (-1, 2), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi^3 < x) = P(\xi < \sqrt[3]{x}) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \sqrt[3]{x} \leqslant -1, \ \text{azaz} \ x \leqslant -1, \\ \frac{\sqrt[3]{x}+1}{3} & \text{ha} \quad -1 < \sqrt[3]{x} < 2, \ \text{azaz} \ -1 < x < 8, \\ 1 & \text{ha} \quad \sqrt[3]{x} \geqslant 2, \ \text{azaz} \ x \geqslant 8. \end{cases}$$

Így η sűrűségfüggvénye:

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}} & \text{ha} \quad x \in (-1, 8), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezért η várható értéke

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\eta(x)\,\mathsf{d}x = \int_{-1}^{8} x\frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{9}\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{9}\left[\frac{x^{4/3}}{4/3}\right]_{-1}^{8} \\
&= \frac{1}{9}\frac{3}{4}(8^{4/3} - (-1)^{4/3}) = \frac{1}{12}(2^4 - 1) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Közvetlenül ξ sűrűségfüggvényét felhasználva is számolhatjuk η várható értékét:

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_\xi(x)\,\mathsf{d}x = \int_{-1}^{2} x^3\frac{1}{3}\,\mathsf{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{12}(16-1) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

□

3.5.4. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 3.6.3.) Legyenek X és Y diszkrét valószínűségi változók, hogy

$$P(X = x, Y = y) = \frac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)}, \qquad x, y \in \mathbb{N},$$

ahol $C > 0$ konstans. (Itt $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.)

(i) Határozzuk meg C értékét!

(ii) Határozzuk meg X és Y eloszlását!

(iii) Határozzuk meg X várható értékét!

Megoldás. (i) és (ii): Tetszőleges $x \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= \sum_{y=1}^{\infty} P(X = x, Y = y) = C \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)} \\
&= \frac{C}{2} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{x+y+1-(x+y-1)}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)} \\
&= \frac{C}{2} \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+y-1)(x+y)} - \frac{1}{(x+y)(x+y+1)} \right).
\end{aligned}$$

Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
&\sum_{y=1}^{n} \left(\frac{1}{(x+y-1)(x+y)} - \frac{1}{(x+y)(x+y+1)} \right) \\
&\quad = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} - \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \\
&\quad = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+n)(x+n+1)},
\end{aligned}$$

és így minden $x \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
&\sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+y-1)(x+y)} - \frac{1}{(x+y)(x+y+1)} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right) \\
&\quad = \frac{1}{x(x+1)}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$P(X = x) = \frac{C}{2} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right), \qquad x \in \mathbb{N}.$$

Mivel

$$1 = \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} P(X = x, Y = y) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) \qquad \text{kell legyen,}$$

kapjuk, hogy

$$1 = \frac{C}{2}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{C}{2},$$

és így $C = 2$. Az előző számolások azt is adják, hogy

$$P(X = x) = \frac{1}{x(x+1)}, \quad x \in \mathbb{N}, \qquad \text{és} \qquad P(Y = y) = \frac{1}{y(y+1)}, \quad y \in \mathbb{N}.$$

(iii): Mivel X nemnegatív, így a várható értéke létezik (legfeljebb $+\infty$). Továbbá

$$\mathbb{E}X = \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x+1} = +\infty.$$

Így X várható értéke $+\infty$.

Vegyük észre, hogy X és Y nem függetlenek, mert például

$$P(X = x, Y = 1) = \frac{2}{x(x+1)(x+2)}, \quad x \in \mathbb{N},$$

és

$$P(X = x)P(Y = 1) = \frac{1}{x(x+1)}\frac{1}{1\cdot 2}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Így

$$P(X = x, Y = 1) \neq P(X = x)P(Y = 1), \quad \text{ha } x \neq 2.$$

□

3.5.5. Feladat. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, hogy X exponenciális eloszlású λ paraméterrel és Y exponenciális eloszlású μ paraméterrel, ahol $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Legyen továbbá $U := \min(X, Y)$.

(i) Határozzuk meg a $P(U = X)$ valószínűséget!

(ii) Határozzuk meg U várható értékét!

Megoldás. (i): Felhasználva, hogy X és Y függetlenek, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
P(U = X) = P(X \leqslant Y) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, x\leqslant y\}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y \\
&= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2:\, x\leqslant y\}} \lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\lambda\mu e^{-\lambda x}e^{-\mu y}\,\mathsf{d}y\right)\mathsf{d}x = \lambda\mu\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\left[\frac{e^{-\mu y}}{-\mu}\right]_{y=x}^{+\infty}\mathsf{d}x \\
&= \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}e^{-\mu x}\,\mathsf{d}x = \lambda\left[\frac{e^{-(\lambda+\mu)x}}{-(\lambda+\mu)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

Első megoldás (ii)-re: Az (i) részhez hasonlóan kaphatjuk, hogy $P(U = Y) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Ekkor

$$\mathbb{E}U = \mathbb{E}\big(U\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y\}}\big) + \mathbb{E}\big(U\mathbb{1}_{\{X>Y\}}\big) = \mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y\}}\big) + \mathbb{E}\big(Y\mathbb{1}_{\{X>Y\}}\big).$$

Itt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X\mathbb{1}_{\{X\leqslant Y\}}\big) &= \iint_{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2:\, x\leqslant y\right\}} x\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\,\mathsf{d}y\right)\mathsf{d}x\\
&= \lambda\mu\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}\left[\frac{e^{-\mu y}}{-\mu}\right]_{y=x}^{+\infty}\mathsf{d}x = \lambda\int_0^{+\infty} xe^{-(\lambda+\mu)x}\,\mathsf{d}x\\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^{+\infty} x(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)x}\,\mathsf{d}x = \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan $\mathbb{E}\big(Y\mathbb{1}_{\{X>Y\}}\big) = \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^2}$. Így

$$\mathbb{E}U = \frac{\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)^2} = \frac{1}{\lambda+\mu}.$$

Második megoldás (ii)-re: Meghatározzuk U eloszlását, majd ezt felhasználva számoljuk ki a várható értékét. Először U eloszlásfüggvényét írjuk fel. Tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
F_U(x) &= P(\min(X,Y) < x) = 1 - P(\min(X,Y)\geqslant x) = 1 - P(X\geqslant x, Y\geqslant x)\\
&= 1 - P(X\geqslant x)P(Y\geqslant x).
\end{aligned}$$

Így

$$F_U(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}e^{-\mu x} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)x} & \text{ha}\quad x>0,\\ 0 & \text{ha}\quad x\leqslant 0.\end{cases}$$

Tehát U exponenciális eloszlású $(\lambda+\mu)$-paraméterrel. Ezért $\mathbb{E}U = \frac{1}{\lambda+\mu}$. □

3.5.6. Feladat. (i) Mikor nevezünk egy ξ valószínűségi változót diszkrét eloszlásúnak, illetve abszolút folytonos eloszlásúnak?

(ii) Mit értünk egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényén?

2.Zh

3.5.7. Feladat. Legyenek η_1 és η_2 független, 1-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy a $\log\big(\eta_1/\eta_2\big)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(x) := \frac{1}{1+e^{-x}},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Megoldás. Lásd az 1.1.8. Feladat (c) részének megoldását. □

3.5.8. Feladat. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg ξ karakterisztikus függvényét!

Megoldás. Lásd a 2.5.2. Feladat megoldását. $\square$

3.5.9. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen ξ_n n-edrendű, p_n-paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, ahol $np_n \to \lambda \in (0, +\infty)$ és $p_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy $\xi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Pois}(\lambda)$, ha $n \to \infty$.

Megoldás. Lásd a 2.5.13. Feladat megoldását. $\square$

3.5.10. Feladat. Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ egy 2-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó $m \in \mathbb{R}^2$ várható érték vektorral és D invertálható kovarianciamátrixxal. Határozzuk meg ξ_1-nek a $\xi_2 = x_2$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlását, ahol $x_2 \in \mathbb{R}$.

Megoldás. Lásd a 2.8.2. Feladat megoldását. $\square$

3.5.11. Feladat. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(4,4)$, $(6,4)$, $(6,6)$ és $(4,6)$ csúcspontokkal rendelkező négyzeten. Legyen $A := (1,2)$ és $B := (\xi, \eta)$, jelölje továbbá P az x tengely azon pontját, melyre $AP + PB$ minimális. Határozzuk meg P várható értékét! (Itt AP, illetve PB az A és P, ill. a P és B pontok által meghatározott szakasz hosszát jelöli.)

Megoldás. Határozzuk meg először a P pont koordinátáit ξ és η függvényében. Végiggondolható, hogy a P pont nemmás, mint az x tengelynek és az $\widetilde{A}$ és B pontokat összekötő egyenesnek a metszéspontja, ahol $\widetilde{A} = (1, -2)$ az A pont tükörképe az x tengelyre.

Felírjuk most az $\widetilde{A}$ és B pontokat összekötő egyenes egyenletét. Ezen egyenes egy irányvektora $\overrightarrow{\widetilde{A}B} = (\xi - 1, \eta + 2)$. Így az egyenes egy normálvektora $(-(\eta + 2), \xi - 1)$, és ezért az egyenes egyenlete

$$-(\eta + 2)x + (\xi - 1)y = -(\eta + 2)1 + (\xi - 1)(-2).$$

Mivel a P pont illeszkedik az x tengelyre, ezért $P = (p, 0)$ alakú. Így

$$-(\eta + 2)p = -(\eta + 2)1 + (\xi - 1)(-2)$$
$$p = 1 + \frac{2(\xi - 1)}{\eta + 2}.$$

Ezért

$$\mathbb{E}P = \left(1 + 2\mathbb{E}\left(\frac{\xi - 1}{\eta + 2}\right), 0\right).$$

Felhasználva, hogy (ξ,η) egyenletes eloszlású a megadott négyzeten, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\xi-1}{\eta+2}\right) &= \int_4^6\int_4^6 \frac{x-1}{y+2}\,\frac{1}{4}\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y = \frac{1}{4}\int_4^6 (x-1)\left(\int_4^6 \frac{1}{y+2}\mathsf{d}y\right)\mathsf{d}x\\
&= \frac{1}{4}\int_4^6 (x-1)\Big[\ln(y+2)\Big]_4^6\,\mathsf{d}x = \frac{1}{4}\int_4^6 (x-1)(\ln 8-\ln 6)\,\mathsf{d}x\\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{8}{6}\right)\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_4^6 = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{36}{2}-6-\frac{16}{2}+4\right)\\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{20}{2}-2\right) = 2\ln\left(\frac{4}{3}\right)\approx 0.5753.
\end{aligned}$$

Így

$$\mathbb{E}P = \left(1+4\ln\left(\frac{4}{3}\right),0\right)\approx(3.3012;0)$$

□

3.5.12. Feladat. (Grimmett–Stirzaker [4], 5.12.52.) Legyen (X,Y) abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó az alábbi sűrűségfüggvénnyel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2)) & \text{ha} \quad |x|<1 \quad \text{és} \quad |y|<1,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy

(i) X és Y nem függetlenek,

(ii) $\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=\varphi_{X+Y}(t)$, $t\in\mathbb{R}$. (Itt φ karakterisztikus függvényt jelöl.)

Megoldás. (a): Jelölje f_X, illetve f_Y az X, illetve Y valószínűségi változók sűrűségfüggvényét. Ha X és Y függetlenek lennének, úgy

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\quad x,y\in\mathbb{R},$$

teljesülne. Megmutatjuk, hogy ez utóbbi egyenlőség nem teljesül. Valóban, minden $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathsf{d}y.$$

Így, ha $|x|\geqslant 1$, úgy $f_X(x)=0$, és $|x|<1$ esetén

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))\,\mathsf{d}y = \left[\frac{1}{4}\left(y+x^3\frac{y^2}{2}-x\frac{y^4}{4}\right)\right]_{y=-1}^{y=1}\\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{x^3}{2}-\frac{x}{4}+1-\frac{x^3}{2}+\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

azaz X egyenletes eloszlású $(-1,1)$-en. Hasonlóan, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathsf{d}x.$$

Így, ha $|y| \geqslant 1$, úgy $f_Y(y) = 0$, és $|y| < 1$ esetén

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2))\,\mathsf{d}x = \left[\frac{1}{4}\left(x + y\frac{x^4}{4} - y^3\frac{x^2}{2}\right)\right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{y}{4} - \frac{y^3}{2} + 1 - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha} \quad |y| < 1, \\ 0 & \text{ha} \quad |y| \geqslant 1, \end{cases}$$

azaz Y egyenletes eloszlású $(-1,1)$-en. Így, ha $|x| < 1$ és $|y| < 1$, úgy

$$f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{4} \neq f(x,y).$$

(b): Meghatározzuk először X és Y karakterisztikus függvényét. Felhasználva a 2.5.6. Feladatot kapjuk, hogy

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{1}{i2t}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{\sin t}{t}, \quad \text{ha } t \neq 0,$$

illetve $\varphi_X(0) = \varphi_Y(0) = 1$.

Meghatározzuk most $X + Y$ karakterisztikus függvényét:

$$\begin{aligned} &\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{it(X+Y)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{it(x+y)}\frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2))\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{itx}e^{ity}\frac{1}{4}(1 + x^3y - xy^3)\,\mathsf{d}x\,\mathsf{d}y \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} e^{itx}\,\mathsf{d}x\right)^2 + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^3 e^{itx}\left(\int_{-1}^{1} y e^{ity}\,\mathsf{d}y\right)\mathsf{d}x - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x e^{itx}\left(\int_{-1}^{1} y^3 e^{ity}\,\mathsf{d}y\right)\mathsf{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} e^{itx}\,\mathsf{d}x\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} x^3 e^{itx}\,\mathsf{d}x\right)\left(\int_{-1}^{1} y e^{ity}\,\mathsf{d}y\right) - \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} x e^{itx}\,\mathsf{d}x\right)\left(\int_{-1}^{1} y^3 e^{ity}\,\mathsf{d}y\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} e^{itx}\,\mathsf{d}x\right)^2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Így, felhasználva, hogy X és Y a $(-1,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásúak, kapjuk, hogy

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} e^{itx}\,\mathsf{d}x\right)^2 = \left(\int_{-1}^{1} e^{itx}\frac{1}{2}\,\mathsf{d}x\right)^2 = (\varphi_X(t))^2 = \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

3.6. 2009. év példái

3.6.1. Feladat. Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Létezik-e $\frac{1}{\xi^2}$ várható értéke? Feltéve, hogy igen, véges-e ez a várható érték?

Megoldás. Lásd az 1.1.13. Feladat megoldását. □

3.6.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha ξ_n tart sztochasztikusan ξ-hez, η_n tart sztochasztikusan η-hoz, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a\xi_n + b\eta_n$ tart sztochasztikusan $a\xi + b\eta$-hoz.

3.6.3. Feladat. Legyenek $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ olyan valószínűségi változók, melyekre

$$P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad P(\xi_n = n^2) = P(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{2n^2}.$$

Igaz-e, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sorozat 1-valószínűséggel konvergál 0-hoz? Igaz-e, hogy a $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ sorozat L_1-ben konvergál 0-hoz?

3.6.4. Feladat. Legyenek X_n, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók, melyekre

$$P(X_n = n^2 - 1) = \frac{1}{n^2}, \qquad P(X_n = -1) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}X_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, de

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -1\right) = 1.$$

3.6.5. Feladat. Legyenek a ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ sorozat elemei q_n-paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók, ahol $q_n \to 0$, ha $n \to +\infty$. Határozzuk meg az $\eta_n := q_n\xi_n$, $n \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó sorozat határeloszlását! (Feltételezzük, hogy $q_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$.)

3.6.6. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen ξ_n normális eloszlású valószínűségi változó $(n,1)$-paraméterekkel. Feszes-e a $\{P_{\xi_n}, n \in \mathbb{N}\}$ mértékcsalád, ahol P_{ξ_n} a ξ_n valószínűségi változó eloszlását jelöli?

Megoldás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén P_{ξ_n} az a valószínűségi mérték az $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mérhető téren, melyre $P_{\xi_n}(B) = P(\xi_n \in B)$ tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel-halmaz esetén. A

$\{P_{\xi_n}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi mértékből álló család definíció szerint akkor feszes, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} P_{\xi_n}(\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Indirekt megmutatjuk, hogy a $\{P_{\xi_n}, n \in \mathbb{N}\}$ mértékcsalád nem feszes. Tegyük fel, hogy feszes. Ekkor $\varepsilon := 0.5$-hez létezik olyan $K_{0.5} \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, hogy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} P_{\xi_n}(\mathbb{R} \setminus K_{0.5}) \leqslant 0.5.$$

Mivel $K_{0.5}$ korlátos is, létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $K_{0.5} \subset [-x, x]$. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P_{\xi_n}(\mathbb{R} \setminus K_{0.5}) \geqslant P_{\xi_n}(\mathbb{R} \setminus [-x, x]) = P(\xi_n < -x) + P(\xi > x) = \Phi(-x-n) + 1 - \Phi(x-n),$$

ahol Φ egy standard normális eloszlaású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelöli. Így

$$0.5 \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} P_{\xi_n}(\mathbb{R} \setminus K_{0.5}) \geqslant \Phi(-x-n) + 1 - \Phi(x-n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Azonban

$$\lim_{n\to\infty} (\Phi(-x-n) + 1 - \Phi(x-n)) = 1,$$

azaz ellentmondásra jutottunk. □

Hivatkozások

[1] Iglói Endre, *Matematikai statisztika feladatgyűjtemény,* Debreceni Egyetem, Informatikai Kar, 2006. URL: http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/igloi/okt_sa.html

[2] Bognár Jánosné, Mogyoródi József, Prékopa András, Rényi Alfréd és Szász Domokos, *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény,* Typotex Kiadó, 2001.

[3] A. Járai, *Invariant extension of Haar measure,* Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) CCXXXIII, Warszawa, 1984.

[4] G. R. Grimmett and D. R. Stirzaker, *One Thousand Exercises in Probability,* Oxford University Press, 2001.

[5] A. N. Kolmogorov és Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funcionálanalízis elemei,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[6] Medvegyev Péter, *Valószínűségszámítás,* Aula, 2002.

[7] T. Móri, Diszkrét paraméterű martingálok. Egyetemi jegyzet, ELTE, 1999.

[8] Pap Gyula, *Valószínűségszámítás 2.,* 2005.

[9] Rényi Alfréd, *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, 1973.

[10] J. Shao, *Mathematical Statistics: Exercises and Solutions,* Springer, 2005.

[11] A. N. Shiryaev, *Probability (Second Edition),* Springer, 1996.

[12] Simon L. és E. A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[13] K. R. Stromberg, *Probability for analysts,* Chapman & Hall, 1994.

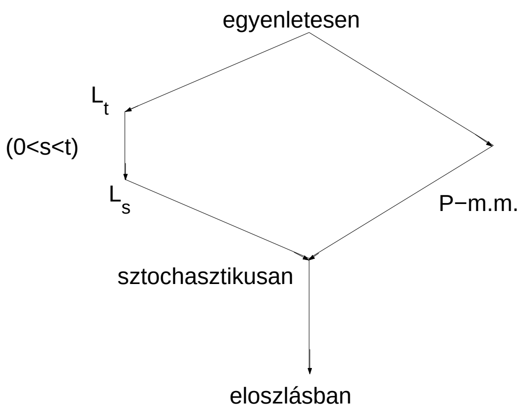
[14] A. A. Sveshnikov, *Problems in probability theory, mathematical statistics and theory of random functions,* Dover Publications, 1968.

[15] Székely J. Gábor, *Paradoxonok a véletlen matematikájában,* Typotex, 2004.

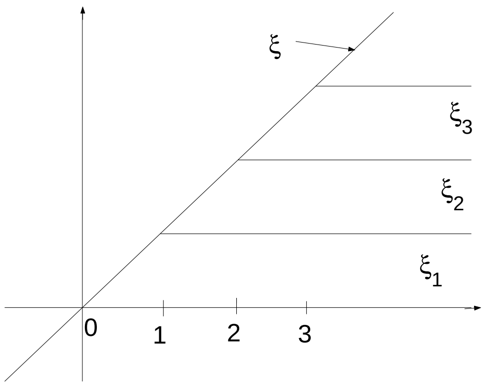
[16] B. A. Szevasztyanov, V. P. Csisztyakov és A. M. Zubkov, *Valószínűségelméleti feladatok,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

Ábrák jegyzéke

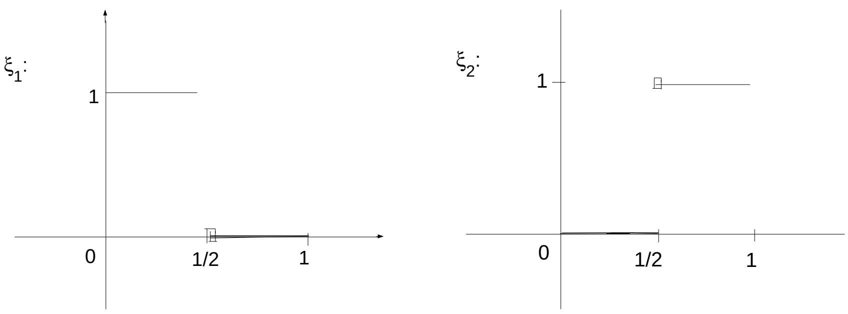
1. Konvergenciafajták 247
2. P-m.m. konvergál, egyenletesen nem 247
3. L_p-ben konvergál, P-m.m. nem (1. rész) 247
4. L_p-ben konvergál, P-m.m. nem (2. rész) 248
5. P-m.m. konvergál, L_p-ben nem 248
6. Eloszlásban konvergál, sztochasztikusan nem (1. rész) 248
7. Eloszlásban konvergál, sztochasztikusan nem (2. rész) 248
8. Gamma eloszlás, zárt görbe (1. rész) 249
9. Gamma eloszlás, zárt görbe (2. rész) 249
10. Háromszög 249
11. Integrálási tartomány (1. rész) 250
12. Integrálási tartomány (2. rész) 250



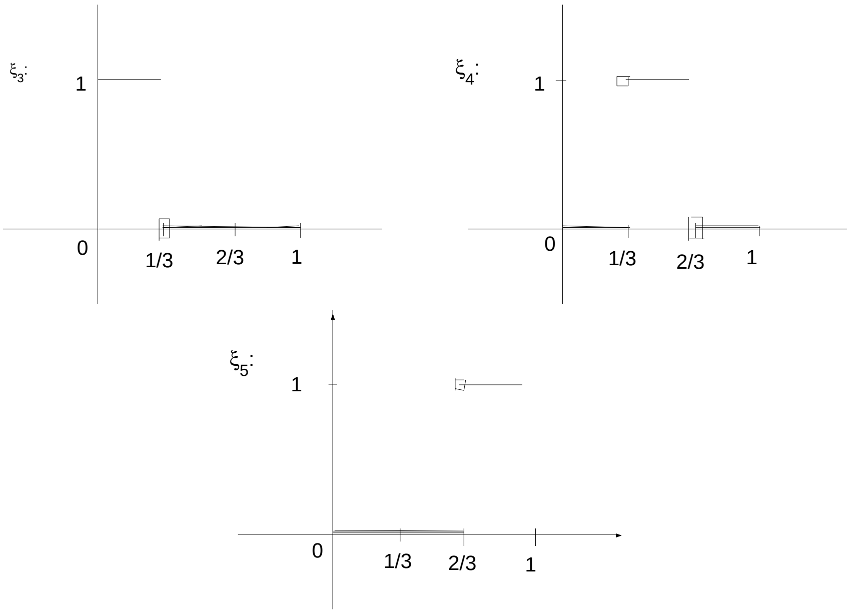
1. ábra. Konvergenciafajták



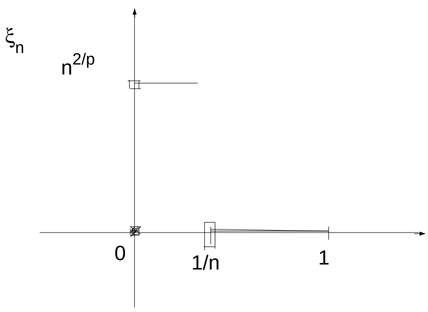
2. ábra. P-m.m. konvergál, egyenletesen nem



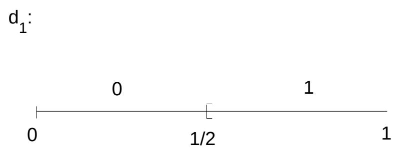
3. ábra. L_p-ben konvergál, P-m.m. nem (1. rész)



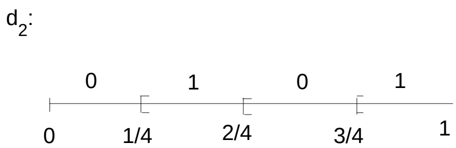
4. ábra. L_p-ben konvergál, P-m.m. nem (2. rész)



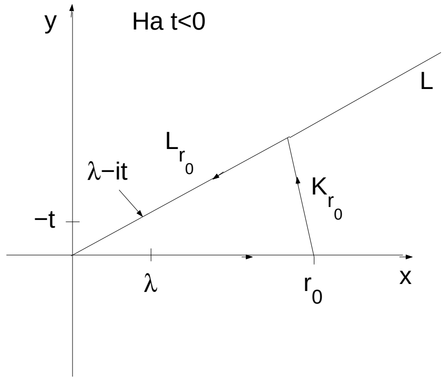
5. ábra. P-m.m. konvergál, L_p-ben nem



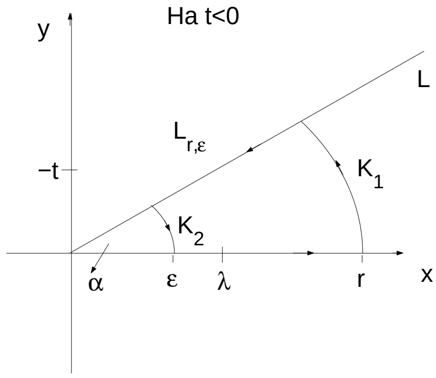
6. ábra. Eloszlásban konvergál, sztochasztikusan nem (1. rész)



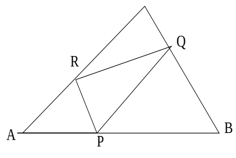
7. ábra. Eloszlásban konvergál, sztochasztikusan nem (2. rész)



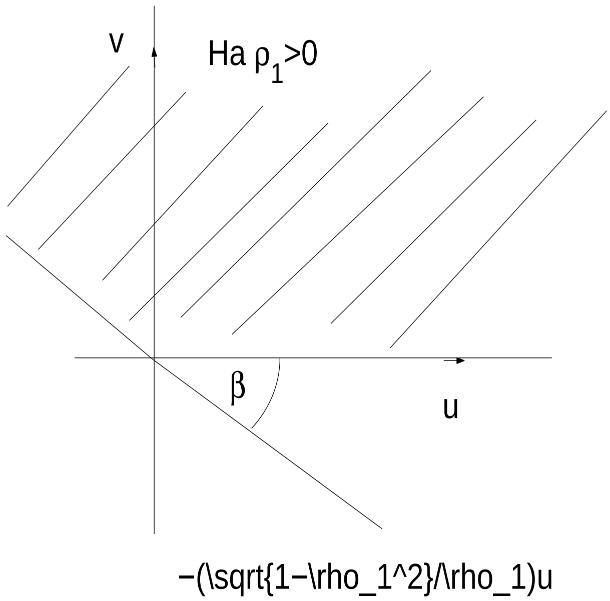
8. ábra. Gamma eloszlás, zárt görbe (1. rész)



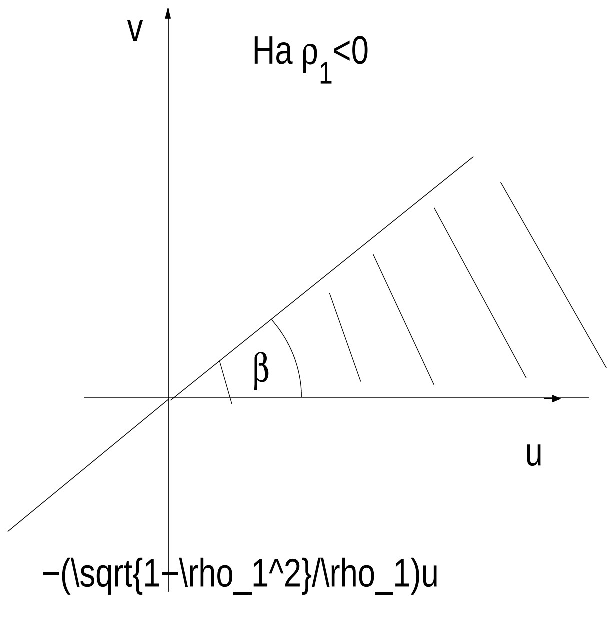
9. ábra. Gamma eloszlás, zárt görbe (2. rész)



10. ábra. Háromszög



11. ábra. Integrálási tartomány (1. rész)



12. ábra. Integrálási tartomány (2. rész)